

有限要素法による弯曲水路における二次流の鉛直分布の計算

立命館大学工学部 正員 小沢 功一

1. はじめに 河道弯曲部における二次流の水平成分は、鉛直方向に底面近くでは内岸方向へ向き水面近くになる程外岸向きに変化してくるような分布をしていることが知られている。この底面近くの二次流は河床変動と関連するものと見られ、定量的に評価されることが望まれている。

水深に比較して幅のない水路中央部における二次流の鉛直分布については、従来から種々の方法による研究がなされてきている。たとえば半径方向の運動方程式を積分して求めるとか二次流の流れ関数を用いて検討するとかあるいは渦度の保存則から関係式を得る方法などがある。これらの結果を考察してみると、底面附近の二次流の大きさが不定であったり、その速度こう配が零と仮定されていたりする。また弯曲部全体の数値計算の方法の場合は計算が龐大となり必ずしも実用的でないような結果になっている。

本研究においては半径方向の運動方程式を一次元の有限要素法を用いて二次流の大きさを簡単に求められ

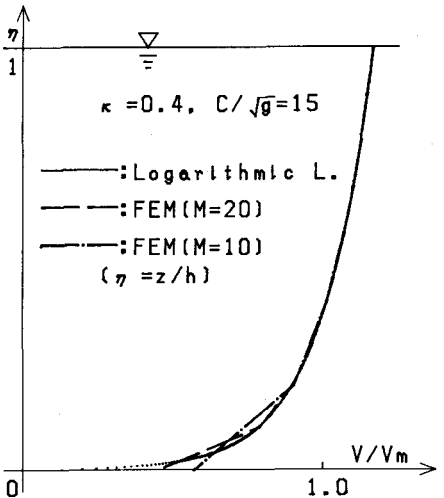


図-1 対数則(分割数による変化)

2. 基礎式 横断方向の運動方程式としては、幅に比較して水深は小さいと仮定して次式

$$-\nu \partial^2 u_r / \partial z^2 = -g I_r + \partial (\varepsilon \partial u_r / \partial z) / \partial z \quad (1)$$

を用いる。ここに ε は渦動粘性係数で

$\varepsilon = \kappa u_* h \eta (1 - \eta)$ としている。 η は無次元鉛直座標 $\eta = z/h$ 、 z は水路底から鉛直上方向にとった座標である。 I_r は水面の横断こう配であり、

$I_r = (1 + \alpha_0) U_m^2 / g h$ となる。 U_m は主流速度の鉛直平均、 α_0 は $1 / \kappa^2 C^2$ となるが 1 に比較して小さいから省略する。主流速度の鉛直分布については次の

対数則を用いる。 $\partial u_r / \partial z = u_* / \kappa z$ ----- (2)

これを有限要素法で重み関数として一次元の $\{N_i\}^T = \{y_1, y_2\} = \{1 - \bar{x}_i / \Delta e, \bar{x}_i / \Delta e\}$ を用いて解き、漸化式の形で表わすと次のようになる。

$$-V_{j-1} + V_{j+1} = (2u_* / \kappa) (\Delta e / z_j) \quad (3)$$

摩擦速度 $u_* = U_m \sqrt{g} / C$ として速度を U_m で無次元化

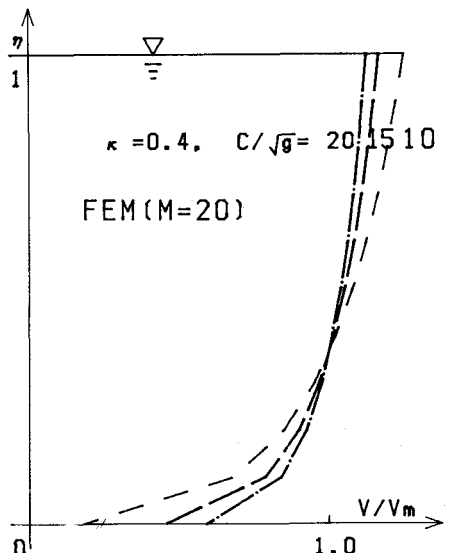


図-2 対数則(粗度による変化)

Koichi OZAWA

し、 $\kappa = 0.4$ 、 $C/\sqrt{g} = 15$ の場合につき、分割数を 10、20 として理論値と比較すると、図-1 のようである。また流速係数 $C/\sqrt{g}$ 、Karman 定数 κ をパラメーターとして比較したのが図-2、図-3 である。

これらの値を用いて式(1)を対数則の場合と同様に一次式の $\{M\}$ を用いて、有限要素法による解を漸化式の形で示すと次のようである。

$$-V_{j-1} + 2V_j - V_{j+1} = (1/\varepsilon_j)(4e^2/rh)[U_j(U_{j-1} + 4U_j + U_{j+1})/6 - 1] \dots (4)$$

ここに V および U はそれぞれ二次流、主流速度である。

3. 実験的検討 二次流の鉛直分布の式(4)を $C/\sqrt{g} = 15$ のとき κ をパラメーターとして示すと図-4 のようになる。この場合の境界条件は一つには水面でのせん断力は零であるという事ともう一つは、鉛直方向に二次流の総和をとると零になるという条件である。すなわち底面から水面までで二次流は内岸向きから外岸向きに変化するが水深に渡ってバランスしているという事である。

二次流の実測値については図-4 においてプロットされている通りである。この測定値は水路幅 50 cm の単一の 180 度弯曲部に流量として 9.3 l/s を流した時の弯曲角が 120 度の位置においてピトー管により得られた値である。水深は水路中央で 5.74 cm であり、実測値もこの位置のものである。このときのフルード数は 0.52 程である。式(4)を $C/\sqrt{g}$ をパラメーターとし、 κ をたとえば 0.5 にして図を描くとほとんど同じ図になってしまい、粗度の違いによる二次流の大きさの変化はあまりない状況になっている。

4. おわりに 開水路弯曲部における水平方向の二次流の鉛直分布を横断方向の運動方程式(1)を有限要素法を用いて解き、実験的に得られた値と比較して次のような結果が得られた。

(1) 主流速度の鉛直分布に對数則を用いると底面で不定となるから基になる式(2)に戻り、これも有限要素法により鉛直分布を求めた。この場合の分割数については細かくすれば精度は上がるが、図-2 から明らかなように 20 分割にもすれば底面附近を除いてかなりの精度が得られる。この場合式(3)からも明らかなように求める値は分割数の半分程しか得られないことになっている。

(2) 上記のようにして得られた主流の鉛直分布、渦動粘性係数には放物線分布を用いて式(1)から有限要素法により二次流の鉛直分布を求めると図-4 のようになった。実験値と比較してみると Karman 定数は $\kappa = 0.5$ の場合に最も理論値と一致するようである。

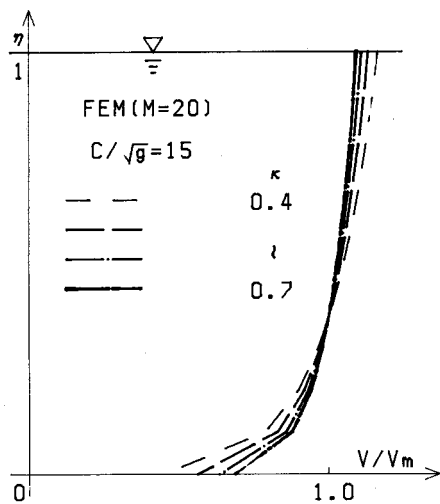


図-3 対数則 (κ による変化)

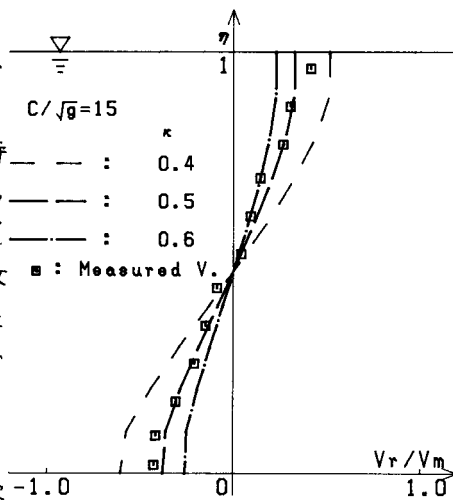


図-4 二次流の理論値と測定値