

地形性降雨の基礎方程式系とそのシミュレーション

京都大学防災研究所 正員 池淵 周一 中北 英一
京都大学大学院 学生員 ○筒井 雅行

1. 概 要 本報告では浅い対流性降雨の基礎方程式を例示し、山岳地帯の温度勾配を無視した乾燥空気の定常流れの解析を有限要素法を用いて行う。各気象要素の降雨に及ぼす影響を調べて降雨予測手法の基礎資料を得るためには、初期の流れ場自身にこれを変動させる要因がないよう、あらかじめ定常流れ場を求めておく必要がある。その際、境界条件の設定に当たって考慮した点を述べるとともに、得られた結果に対する考察を行う。

2. 浅い対流性降雨の基礎方程式系 表1に、浅い対流性降雨の基礎方程式系¹⁾を示す。ここではScale Analysisによる近似を行っており、添字 θ は、総観場における物理量を表す。たとえば ρ_θ は、総観場における乾燥空気の密度で、高さ z のみの関数である。 ψ は流れ関数で、風速ベクトルを (U, W) とすると、 $\partial\psi/\partial z = \rho_\theta U$ 、 $-\partial\psi/\partial x = \rho_\theta W$ である。渦度 ζ は(2)式のように定義した。 ν は渦拡散係数でその値は $10^5 \text{ cm}^2/\text{s}$ のオーダーに達し、分子の熱運動に伴う粘性は乱流による粘性に対して無視できる。また、雨滴の大きさは、表中の7つの大きさの半径で離散的に表している。

表1. 浅い対流性降雨の基礎方程式系

渦度方程式	$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{1}{\rho_\theta} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{1}{\rho_\theta} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \rho_\theta \left[\frac{1}{T_\theta} \frac{\partial T_\theta}{\partial x} + g \frac{\partial T_\theta}{\partial x} - \frac{1}{\rho_\theta} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial^2 \rho_\theta}{\partial z^2} \right. \\ \left. - \frac{2}{\rho_\theta} \frac{\partial \psi}{\partial x} \left(\zeta - \frac{1}{\rho_\theta} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \rho_\theta}{\partial z} \right) \frac{1}{\rho_\theta} \frac{\partial \rho_\theta}{\partial z} + \nu \nabla^2 \zeta \right] \quad (1)$
	$\zeta = \nabla^2 \psi \quad (2)$
熱力学方程式	$\frac{\partial T_\theta}{\partial t} = \left[-\frac{1}{\rho_\theta} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial T_\theta}{\partial x} + \frac{1}{\rho_\theta} \frac{\partial \psi}{\partial x} \left(\frac{\partial T_\theta}{\partial z} + \Gamma_\theta \right) + \frac{L_\theta}{C_p} \frac{\partial q_\theta}{\partial t} + \nu \nabla^2 T_\theta \right] / \left[1 + \frac{L_\theta^2 q_\theta}{C_p R_\theta T_\theta} \right] \quad (3)$
水蒸気に関する方程式	$\frac{\partial q_\theta}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_\theta} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial q_\theta}{\partial x} + \frac{1}{\rho_\theta} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial q_\theta}{\partial z} + \nu \nabla^2 q_\theta \quad (4)$
雨滴密度に関する方程式	$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_\theta} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial n}{\partial x} + \frac{1}{\rho_\theta} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial n}{\partial z} - n \frac{1}{\rho_\theta} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \rho_\theta}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} (nV) - \frac{\partial}{\partial R} (n \frac{DR}{Dt}) + \alpha + \nu \nabla^2 n \quad (5)$ for $R=1, 5, 20, 100, 200, 1000, 3000 \text{ (}\mu\text{)}$
雨滴の成長率	$\frac{DR}{Dt} = \left(\frac{DR}{Dt} \right)_{\text{cond.}} + \left(\frac{DR}{Dt} \right)_{\text{coag.}} \quad (6)$
	$\left(\frac{DR}{Dt} \right)_{\text{cond.}} = \frac{1}{R \rho_w} \left(S - \frac{a}{R} \right) f / \left[\frac{L_\theta^2}{R^2 K} + \frac{R T_\theta}{D e_\theta} \right] \quad (7)$
	$\sum_n n 4 \pi R^2 \left(\frac{DR}{Dt} \right)_{\text{cond.}} \rho_w = \rho_\theta \frac{\partial}{\partial t} (q_\theta - q) \quad (8)$
	$\left(\frac{DR}{Dt} \right)_{\text{coag.}} = \frac{1}{4 \rho_w} \sum_{R < R'} E(R, R') [V(R) - V(R')] n(R') m(R') \quad (9)$
雨滴の分裂・併合に関する方程式	$\alpha = -\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 \quad (10)$
	$\alpha_1 = \sum_{R > R'} n(R') \pi (R' + R)^2 E(R, R') [V(R') - V(R)] n(R) \quad (11)$
	$\alpha_2 = n(R) P_b = n(R) \{ 2.94 \times 10^{-7} \exp(34R) \} \quad (12)$
	$\alpha_3 = \frac{1}{15.6} \sum_{R_1 < R_2} E_2(R_1, R_2) R_1 R_2 \{ \exp(-15.6 R_1) - \exp(-15.6 R_2) \} \quad (13)$

g : 重力加速度, T_θ : 仮温度, L : 潜熱, T : 気温, Γ_θ : 乾燥断熱減率, L_θ : 潜熱, C_p : 定圧比熱, q : 混合比, q_θ : 総観時の混合比, q_s : 水蒸気が凝結しない状態での仮想的な混合比, R_v : 水蒸気の気体定数, n : 単位体積当りの雨滴数, R : 雨滴半径, V : 雨滴の空気に対する終端速度, $(DR/Dt)_{\text{cond.}}$, $(DR/Dt)_{\text{coag.}}$: 凝結および凝集による雨滴の成長率, ρ_w : 水の密度, S : 過飽和度, a : 表面張力効果, f : ventilation factor, K : 空気の熱伝導率, D : 水蒸気分子の拡散係数, e_s : 飽和水蒸気圧, m : 雨滴質量, $E(R, R')$: collection efficiency, α_1 : 半径 $R'(>R)$ の雨滴に併合される雨滴数, α_2 : 分裂する雨滴数, α_3 : 半径 $R'(>R)$ の雨滴の分裂により生じる雨滴数

3. 温度勾配を無視した乾燥空気の定常流れ 温度

勾配を無視した乾燥空気の定常流れの基礎方程式は、

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} - \frac{2}{\rho_0} \frac{\partial \psi}{\partial x} \left(\zeta - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial z} + \nu \nabla^2 \zeta \quad (1')$$

$$\zeta = \nabla^2 \psi \quad (2)$$

で表される。x軸方向に一樣な大規模場の流れに対する山岳地形の影響を調べることを考慮しながら、左右、上下の境界条件を定める。上方の境界条件は、 $\psi = \text{const.}$ 、 $\zeta = \text{const.}$ とする。地表の境界条件は、地面と空気との間に運動量のやりとりはないことから、 $\psi = \text{const.}$ 、 $\zeta = 0$ とする。側方の境界条件は、Neumann型 $\partial \psi / \partial x = 0$ と運動量の鉛直プロファイルから求めた各の節点値をDirichlet型で与える。このとき、少なくとも山岳地形の存在しない平坦な領域で定常流れが存在するように境界条件を設定する必要がある。平坦な地形の場合、上下の境界条件は、 $\partial \psi / \partial x = 0$ 、 $\partial \zeta / \partial x = 0$ なので、(1')式が成立するためには $\partial^2 \zeta / \partial z^2 = 0$ が必要となる。この条件を満足する側方境界の運動量の鉛直プロファイルとして、図1のようなz軸に関する2次関数を用いた。このときの収束計算の結果を渦度の等値線で表したものを図2に示す。収束の判定は、 $\max\{(\zeta_i - \zeta_{i-1}) / \zeta_i\} \leq 0.05$ で行った。ここで、iは計算の繰り返し回数を表す。また、山岳地形は大台ヶ原を想定した。図2で、運動量の流出部における等値線が振動しているが、これは境界条件を必要以上に与えたためと考えられる²⁾。そこで、側方境界では渦度のDirichlet境界条件は運動量の解析対象領域への流入部にあたる節点のみに与え、運動量の流出部ではNeumann境界条件に変更した。その結果を図3に示す。この図より渦は山岳の風下側の上空に生じることがわかる。このことから、山岳下流部では上空の冷たい空気が地上近くまで侵入し、気温は下がると予想される。これは、上流側からの暖かい湿った空気が山腹に沿って上昇する場合、非常に大雨が降りやすい状態を意味する。

今後、温度、混合比、そして雨滴に関する基礎方程式をも考慮して山岳性降雨に及ぼす各気象要素の影響を総合的に検討していくことが必要である。

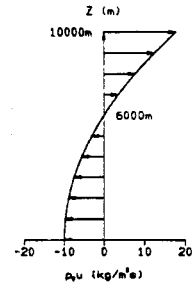


図1 側方境界における運動量の鉛直プロファイル

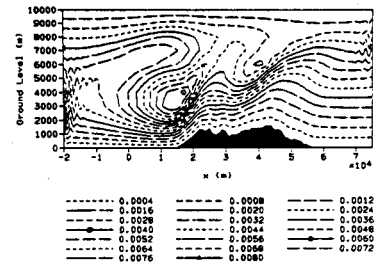
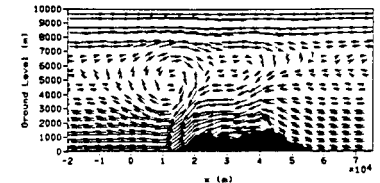
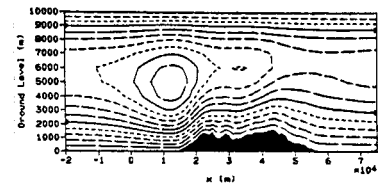


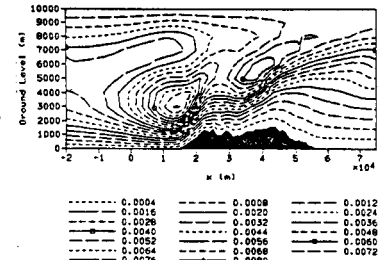
図2 渦度の等値線(kg/m²s)



(a) 風速ベクトル (矢印の長さ: 秒速×400)



(b) 流れ関数の等値線 (kg/ms)



(c) 渦度の等値線(kg/m²s)

図3 定常解

1)Takeda(1970):J.Atmos.Sci.,Vol.28,pp.350-376 2)Pielke(1975):Mesoscale Meteorological Modeling,Academic Press