

最適形状問題に関する基礎的研究(その2)

京都大学工学部 正員 小林 昭一

京都大学工学部 正員 田村 武

神戸製鋼 正員 O仲山 公規

1. はじめに

最適設計において、最適形状に関する問題は重要でありかつ基礎的である。本研究では、異方性弾性棒のねじりを取りあげ、断面積が一定という条件を与えた時、どのような形状でねじり剛性が最大になるかという事を考える。ここでは、ねじり剛性最大化のための最適性規準を利用し、ねじり剛性を求めるのに有限要素法、最適化にはLagrange乗数法と、Newton-Raphson法を用いて計算をした。

2. 解析手法

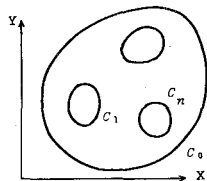
直交異方性材料において、ねじりの基礎方程式は次式で表わされる。

$$\frac{1}{G_y} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{1}{G_x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -2 \quad \text{in } S \quad \dots (1)$$

$$\Psi = 0 \quad \text{on } C_0, \quad \Psi = C_i \quad \text{on } C_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad \dots (2)$$

$$\left(\frac{1}{G_y} \frac{\partial \Psi}{\partial x} n_x + \frac{1}{G_x} \frac{\partial \Psi}{\partial y} n_y \right) = 2A_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad \dots (3)$$

G_x, G_y : x方向, y方向の弾性係数
 A_i : 孔の面積



ただし Ψ は応力関数である。この時ねじり剛性は次式で与えられる。

$$D = 2 \left\{ \int_S \Psi dS + 2 \sum_{i=1}^n C_i A_i \right\} \quad \dots (4)$$

ここで、弾性棒の断面上に原点をとり、そこから周辺曲線または孔縁曲線までの距離を κ_i とすると、目的関数、制約条件(断面積一定)は次式で与えられる。

$$\text{object function } D(\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n) \rightarrow \max \quad \dots (5)$$

$$\text{subject to } g(\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n) = S \quad \dots (6)$$

$$a_i \leq \kappa_i \leq b_i \quad \dots (7)$$

よって考えるLagrange関数は、 $L(\kappa, \lambda) = D(\kappa) - \lambda(g(\kappa) - S)$ (8) となる。

ここで、式(8)において境界が変動する場合の変分を利用すると、最適性規準が式(9)のように求められるが、これは境界が連続的に変動する場合なので本研究では式(10)を利用して

$$\frac{1}{G_y} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{G_x} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 = \lambda \quad \dots (9)$$

$$\int_{\Gamma} (n, sr) \left\{ \frac{1}{G_y} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{G_x} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 \right\} d\Gamma = \int_{\Gamma} (n, sr) d\Gamma \quad \dots (10)$$

n : 境界上の法線ベクトル sr : 境界の変動量

式(10)において、変数 κ_i の変動に対する左辺の値を F_i 、右辺の値を λG_i とすると、解くべき方程式は、Newton-Raphson法を利用すると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} & \left(\frac{\partial F_i}{\partial \kappa_1} - \lambda \frac{\partial G_i}{\partial \kappa_1} \right) \Delta \kappa_1 + \left(\frac{\partial F_i}{\partial \kappa_2} - \lambda \frac{\partial G_i}{\partial \kappa_2} \right) \Delta \kappa_2 + \dots + \left(\frac{\partial F_i}{\partial \kappa_n} - \lambda \frac{\partial G_i}{\partial \kappa_n} \right) \Delta \kappa_n - G_i \Delta \lambda = \lambda G_i - F_i \\ & \frac{\partial g}{\partial \kappa_1} \Delta \kappa_1 + \frac{\partial g}{\partial \kappa_2} \Delta \kappa_2 + \dots + \frac{\partial g}{\partial \kappa_n} \Delta \kappa_n = -g \end{aligned} \right\} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad \dots (11)$$

式(7)に関しては、 $\Delta \kappa_i^k \geq 0$ であれば $\alpha = \min \left(\frac{b_i - \kappa_i^k}{\Delta \kappa_i^k}, 1 \right)$ とし、 $\kappa_i^{k+1} = \kappa_i^k + \alpha \Delta \kappa_i^k$ で次のステッ

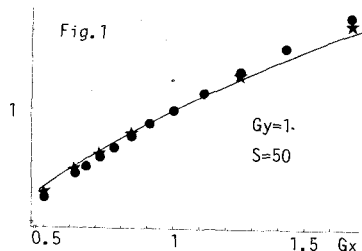
Shoichi Kobayashi, Takeshi Tamura, Kiminori Nakayama

ρ の値を計算する。 $\Delta X_i^k < 0$ であれば $\alpha = \min\left(\frac{Q_i - X_i^k}{\Delta X_i^k}, 1\right)$ である。また $X_i^k = Q_i$ である場合に、 $\Delta X_i^k < 0$ で式(7)を乱す方向に進もうとする時は、 $\Delta X_i^k = 0$ として式(11)を解いて新しい方向ベクトル $(\Delta X_1, \Delta X_2, \dots, \Delta X_{i-1}, 0, \Delta X_{i+1}, \dots, \Delta X_n, \Delta \lambda)$ を求め次のステップへ進む。 $X_i^k = b_i$ の時も同様である。ここでは、各ステップの方向ベクトルの2乗の和が10⁶よりも小さくなれば収束したと判定している。また式(11)の係数の計算には数値微分を用いている。

3. 計算例

(1) 単連結領域の場合 [Fig.4参照]

直交異方性材料で、変数が8個と12個の場合について収束計算をした。Fig.1は計算結果と正解の形状を比較したものであるが、これより形状をよく近似している事が分かる。またねじり剛性の値に関しては、Table.1のようになった。これより本研究の手法の有効性が分かる。



(2) 断面に弾性係数の違う材料を埋め込んだ場合 [Fig.5参照]

等方弾性体の断面に弾性係数の異なる材料を埋め込んだ場合を考える。Fig.2は、斜線部分のような材料を埋め込んだ場合、この部分の弾性係数の違いによってどのように形状が変化するかを示したものである。Fig.3は、この時のねじり剛性の変化を表わしている。

Table.1 Gy=1.0 S=50

Gx	1.67	1.25	1.00
12変数	507.49	439.87	393.51
8変数	500.18	434.27	388.66
正解	514.18	444.85	397.89

0.833	0.714	0.625	0.500
359.17	332.41	310.80	277.47
354.64	3238.01	306.42	273.23
363.15	336.21	314.56	273.23

4. 結論

本研究では、最適性規準を用いて最適化を行っているが、これを利用する事によって、数値計画法によって計算するよりも計算量が減少しかつ数値微分による誤差が減少し、Newton-Raphson法の持つ収束性が十分に発揮されるようになってきている。またねじり剛性の値に関しても非常に良い精度で求まっている。以上のことより本研究の手法は、非常に有効な方法であると言える。さらに、積分方程式を利用すると、さらに精度は上がると思われる。

Fig.4

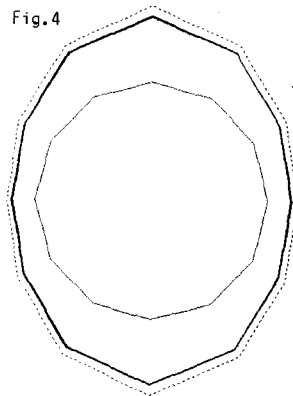


Fig.5

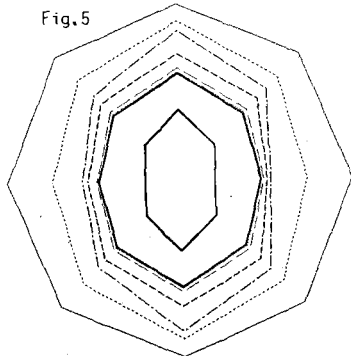
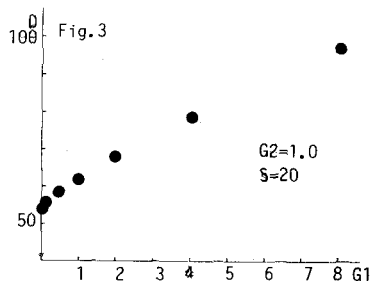
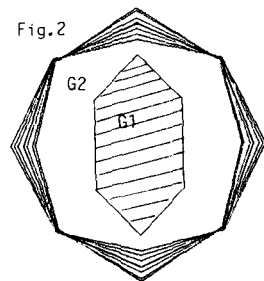


Fig.2



参考文献

- (1) Banichuk.N.V, Problems and Methods of Optimal Structural Design, Int.J. Solids Struct., 1976