多目的計画法による構造物の最適化（その2）

京都大学工学部　正　員　小林昭一
京都大学工学部　正　員　田村　武
京都大学工学部　学生員○和泉敏彦

I. はじめに

節点変位と総重量を同時に最小化する構造物の多目的最適化を考える。本研究では多目的最適化問題のPareto解を導出する手段としてKuhn-Tucker条件（以下K-Tで略）の応用を試みる。以下に述べるように目的関数の凸性・微分可能性の仮定のもとではK-TとPareto解の同値性が証明される。

II. Pareto解とK-T条件の定義

・Pareto解；　$\bar{x}$がPareto解である。$\Leftrightarrow F(\bar{x}+\Delta x)<F(\bar{x})$なる$\Delta x$が存在しない。

・K-T条件；　Lagrange関数を$\mathcal{L}(x,\lambda)=F_0(x)+\sum_i^m \lambda_i(F_i(x)-b_i)$と定義するとき，下式を満たすLagrange乗数$\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_m)$が存在するならば，$\bar{x}$はK-T条件を満足するという。

$$\lambda \geqq 0,\ \nabla\mathcal{L}(\bar{x},\lambda)=0,\ F_i(\bar{x})\leqq b_i,\ \lambda_i(F_i(\bar{x})-b_i)=0\ (i=1,\cdots,m)$$

なお，$\bar{x}$がK-T条件を満足することは，$\bar{x}$が単目的最適化（$F_i(x)\leqq b_i$のもとでの$F_0(x)\to min$）の解であることと同値であることが知られている。

III. Pareto解とK-T条件

・定理；　$\bar{x}$がPareto解であることと，K-T条件を満たすこととは同値である。

・証明；　i)　$\bar{x}$がPareto解である。$\Rightarrow \bar{x}$がK-T条件を満足する。

$\bar{x}$がK-T条件を満足しないならば，$\bar{x}$は$F_0(x)\to min$，$F_i(x)\leqq b_i\ (i=1,\cdots,m)$の解ではないから$F_0(\bar{x}+\Delta x)<F_0(\bar{x})$なる$\Delta x$が存在する。ここで$b_i=F_i(\bar{x})$とすると，$F_i(\bar{x}+\Delta x)\leqq F_i(\bar{x})$である。定義より$\bar{x}$はPareto解ではない。

ii)　$\bar{x}$がK-T条件を満足する$\Rightarrow \bar{x}$はPareto解である

$\bar{x}$がPareto解でないならば，$F(\bar{x}+\Delta x)\leqq F(\bar{x})$なる$\Delta x$が存在する。$F(x)$の凸性より$F(\bar{x}+\Delta x)\geqq F(\bar{x})+\sum_j^m \frac{\partial F}{\partial x_j}\Delta x_j$，両関係より　$0\geqq \sum_j^m \frac{\partial F}{\partial x_j}\Delta x_j$，両辺に$\lambda'=(1,\lambda_1,\cdots,\lambda_m)>0$を乗じて，$0\geqq\left(\frac{\partial F_0}{\partial x}+\sum_i^m \lambda_i\frac{\partial F_i}{\partial x}\right)\Delta x$，よって$\frac{\partial F_0}{\partial x_j}+\sum_i^m \lambda_i\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\neq 0$なる$j$が存在する。したがって$\bar{x}$はK-T条件を満足しない。

IV. 3目的関数（2つの節点変位，重量）のもとでの静定トラス（節点数n，部材数m）の最適化

変位；　$d_i=\sum_j^m a_{ij}/A_j\ (i=c1,c2)$　（ただしa_{ij}は，形状・制約方向・荷重によって，

重量；　$w=\sum_j^m b_j A_j$　　b_jは形状によって決まる定数）

とおくとき，Lagrange関数は，$\mathcal{L}=w+\sum_i^{c2}\lambda_i(d_i-d_{i0})$，K-T条件は$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_j}=b_j-\sum_i^{c2}\lambda_i a_{ij}/A_j^2=0\ (j=1,\cdots,m)$となる。よって$A_j=\left[\sum_i^{c2}\lambda_i a_{ij}/b_j\right]^{\frac{1}{2}}$，Pareto解は$d_i=\sum_j^m a_{ij}\left[\sum_k^{c2}\lambda_k a_{kj}/b_j\right]^{-\frac{1}{2}}$，$w=\sum_j^m b_j\left[\sum_k^{c2}\lambda_k a_{kj}/b_j\right]^{\frac{1}{2}}$と表わすことができる。

V、具体例

i)　2部材トラス；fig. 1　のトラスに制約方向として　α，βが様々な値をとった場合

Shoichi KOBAYASHI　Takeshi TAMURA　Toshihiko IZUMI

のPareto解の概要をfig2-1～5に示す。2つの制約方向が近づくほどPareto解の存在領域は狭くなる。両者が一致した場合の状況は明らかであろう。なおfig2のシリーズにおいては(a)は重量一定平面での断面図を$d_1 \cdot d_2$平面へ射影した図を，(b)は三次元透視図をあらわす。

ii) 19部材トラス（fig.3）．fig.4-1は$(L_1,\cdots,L_4)=(-0.5, 0.0, 0.0, -0.5)$を作用させたうえ節点3・10での変位を目的関数とした場合，fig.4-2 は$(L_1,L_2,\cdots L_4)=(-0.5, 0.0, 0.0, -1.0)$を作用させたうえ節点2・3での変位を目的関数とした場合のPareto解をしめす。

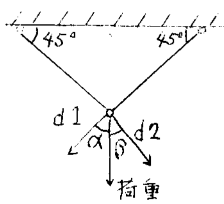

fig. 1

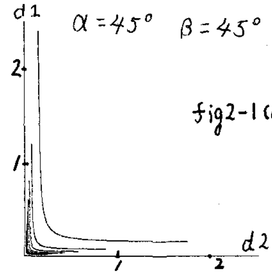

fig2-1(a)

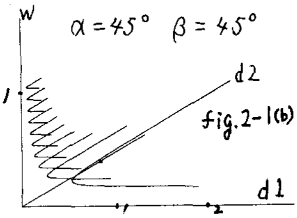

fig.2-1(b)

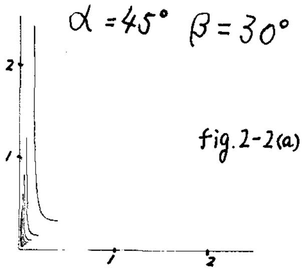

fig.2-2(a)

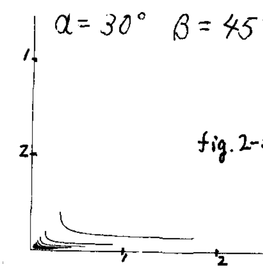

fig.2-3(a)

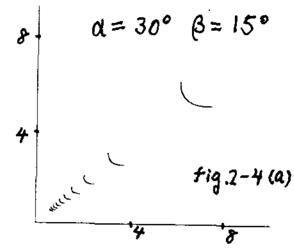

fig.2-4(a)

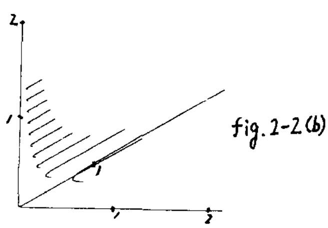

fig.2-2(b)

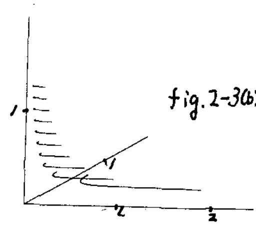

fig.2-3(b)

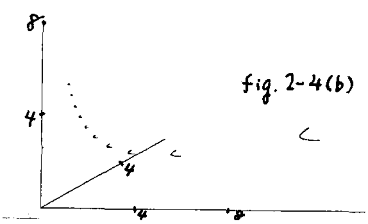

fig.2-4(b)

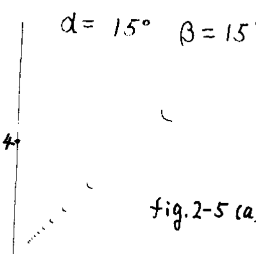

fig.2-5(a)

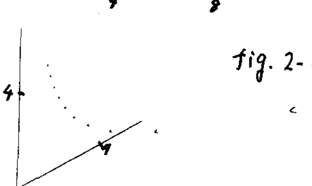

fig.2-5(b)

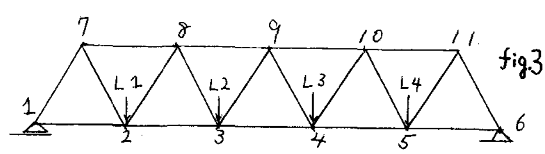

fig3

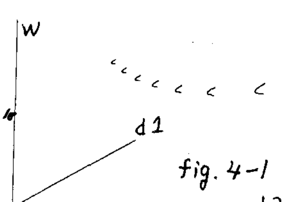

fig.4-1

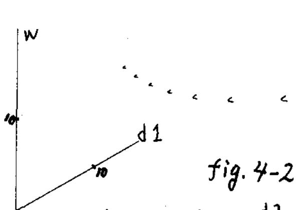

fig.4-2