双対定理を利用した構造物の最適化（その2）

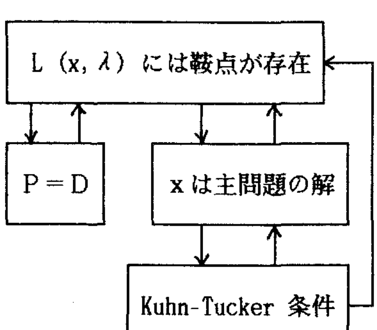
京都大学工学部　正員　　小林　昭一
同　　　正員　　田村　　武
京都大学大学院　学生員　○郭　慶　春

1．はじめに　　構造物の最適設計において，いくつかの制約条件のもとで総重量などの目的関数を直接に最小化する主問題と，Lagrange関数を介して得られる双対目的関数を最大化する双対問題の両者を考えることができる。　後者の特徴は，①主問題の最適値Pに対して　D≦P　なる下界値Dを与えること，②とくに，ある種の条件のもとでは　D＝P　（双対定理）となること，③このとき，双対変数（Lagrange乗数）から直ちに制約条件値に対する目的関数の感度解析ができること　等である。　ここでは，これらの理論の概要とともに，簡単な不静定トラスの例について述べる。

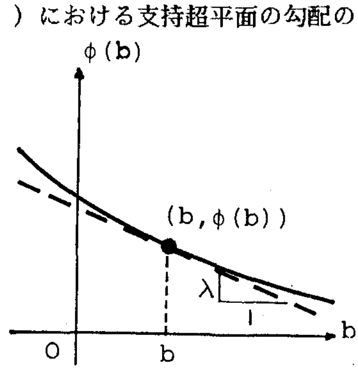
2．双対定理と感度解析　　目的関数 f（x），制約関数 $g_j(x)$ 〔$x_i(x) \in R^n$, j＝1,2,・・・m）は全て，凸関数とする。　$g_j(x) \leq b_j$ のもとで，f（x）→ min. を主問題という。 Lagrange 関数 L（x, λ）を次式で定義する〔$\lambda_j(\lambda) \in R^m$〕。

$$L(x,\lambda)\begin{cases} = f(x) + \sum_j \lambda_j (g_j(x) - b_j) & (\lambda \geq 0) \\ = -\infty & (\text{その他}) \end{cases}$$

このとき，主問題は $\min_x \max_\lambda L(x,\lambda)$ として把えることができる。　一方，これに対して，$\max_\lambda \min_x L(x,\lambda)$ を双対問題と定義する。　これは，双対目的関数として $\omega(\lambda) = \min_x L(x,\lambda)$ とおくとき，$\max_\lambda \omega(\lambda)$ とみてもよい。　Slaterの制約想定〔制約条件を満足する領域に内点が存在すること〕と各関数の微分可能性の仮定のもとでは，図―1に示すように，4つの命題は全て同値となる。ここで，矢印は論証の方向を意味している。　さて，主問題の最適値は，制約条件値bの関数〔最適値関数，図―2参照〕といい，φ（b）とかく。　一般にbについて単調非増加であるが，ここの仮定のもとでは，さらに凸関数であることもいえる。（b，φ（b））における支持超平面の勾配の各座標成分の負値が双対問題の解における双対変数〔Lagrange乗数〕となることより，双対問題を解けば，主問題の制約条件値に対する最適値の感度解析が直ちにできる。



図―1



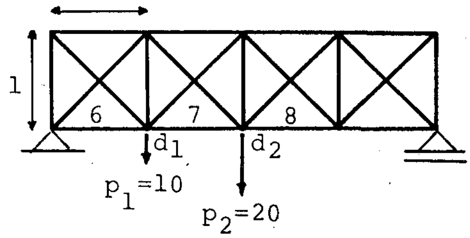
図―2

Shoichi KOBAYASHI, Takeshi TAMURA & KAKU Keishun

3．不静定トラスの例　図－3に示すような21部材（4次）不静定トラスを例に取り上げる。（主）目的関数は，総重量 $w = f(A) = \Sigma L_i A_i$ とする。主たる制約条件として，ある荷重下のもとでのいくつかの節点変位を考える。ところで，静定トラスの場合には任意の荷重に対して，いかなる節点変位を制約条件として与えても，問題全体はつねに凸計画問題の枠のなかで扱うことができるが，不静定トラスの場合には一般に凸計画問題とはならず，2．で概説した理論が適用できなくなる。そこで，節点変位制約条件が凸関数で表現されるような場合を考える。これの1つが対称制約条件（Symmetric Displacement Constraint）とよばれもので，全節点に作用する外荷重を1つのベクトル p とするとき，$q = \gamma p$ なる仮想荷重で表される節点変位を制約することを指す。例えば，単一荷重の場合には，荷重が作用する節点の荷重方向の変位を制約することを意味する。ここでは，節点1に $p_1=10$ のみが作用するときの，その節点の沈下量 d_1 と，節点2に $p_2=20$ のみが作用するときの沈下量 d_2 をそれぞれ $d_1 \leqq b_1 = 5$，$d_2 \leqq b_2 = 10$ とした。また，最小断面積の条件として $A_i \geqq 1$〔$1/A_i \leqq 1$〕なる制約も与えた。

上記の最適設計問題を主問題および双対問題の両者により，数値的に解析した。変位制約条件は，仮想仕事式により $d_j\,[= g_j(A)] - b_j = \sum_k S_{jk}(A)/A_k - b_j \leqq 0$ と表される。ここに，S_{jk} はトラス形状と断面積により定まる係数である。①実行可能域が凸で，目的関数が線形であることより，主問題には支持超平面法を，また，②双対問題には縮小勾配法を適用した。なお，後者では，Kuhn-Tucker 条件を用いて Lagrange 関数から主変数Aを消去するが，各ステップごとに $S_{jk}(A)$ はAについて定数として扱い，繰り返し計算を行った。表－1に結果を示す。これからわかるように，両者による解には十分な一致が見られる。例えば，総重量に関する相対誤差は 0.1%以下である。次に，感度解析に対するLagrange乗数の値のもつ意味を確かめるために，変位の制約条件をそれぞれ 0.02 づつ増加させたときの総重量の減少率と比較した。d_1, d_2 それぞれに対する結果は，3.390 および 10.335 であり，表－1 中の Lagrange 乗数とほぼ一致する値を得た。以上のことから，不静定トラスでも凸性の条件が成立する場合には双対定理を利用することにより，主問題の解の検討や評価ができることがわかった。

参考文献　A.B. Templeman：J. Struct. Mech., 4（3）, pp.235-255, 1976.



図－3

	主問題	双対問題	Lagrange乗数
d_1	(5.0)	4.9999	3.572
d_2	(10.0)	9.9494	11.709
A_6	7.8011	8.1021	0.0
A_7	9.1792	9.0351	0.0
A_8	8.2333	8.2644	0.0
w	139.5518	139.6627	——

表－1