梁の微分方程式まで低減した板の一数値解法

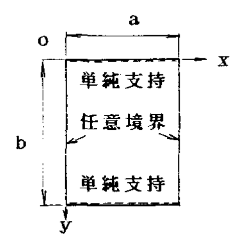
東洋技研コンサルタント（株）　島田功

1。はじめに：　構造要素としての板の強度や変形の解析は構造設計においてきわめて重要である。板の解法は、境界条件を満足する微分方程式の解を求めることにあり、矩形平板に関しては Levy や Navier の解を用いて系統化されている。しかし、この場合は双曲線関数や級数の総和といったやや繁雑な操作を要する。特に、異方性板においては、剛比により解の型が変わり実際の計算は面倒である。

本報告は、相対二辺単純支持の異方性板を対象に、上記のような複雑な式の展開をさけ、我々になじみの深い梁の微分方程式の形にまとめて扱う方法を示したものである。

2。解法の概要：　直交異方性板の基礎微分方程式は次式となる。

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q \quad \text{------------}(1)$$



図－1

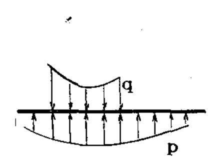
図－1に示す相対二辺単純支持板では、たわみ（w）を

$$w = \sum_n w_n \sin(\beta_n y) \qquad n=1,2,3\ldots \quad \left(\beta_n = \frac{n\pi}{b}\right)$$

とおき、荷重（q）を

$$q = \sum_n q_n \sin(\beta_n y) \qquad n=1,2,3\ldots \quad \left(\beta_n = \frac{n\pi}{b}\right)$$

と展開すると、式（1）は次のように変形できる。

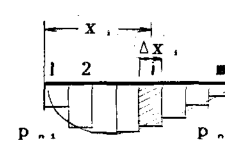


図－2（a）

$$\frac{d^4 w_n}{dx^4} = \frac{1}{D_x}(q_n - p_n) \quad \text{------------}(2)$$

ここに、

$$p_n = \left(-2H \frac{d^2 w_n}{dx^2} + D_y \beta_n^2 w_n\right) \cdot \beta_n^2$$



図－2（b）

式（2）は剛度 Dx の梁の曲げの基本式と同じであり、解は次のように与えられる。

$$w_n = C_{1n} + C_{2n}x + C_{3n}x^2 + C_{4n}x^3 + \bar{w}_{on} \cdot q_n + \tilde{w}_{on} \cdot p_n \quad \text{------------}(3)$$

ここに、　$C_{1n}, C_{2n}, C_{3n}, C_{4n}$ は積分定数で、

$\bar{w}_{on}$, $\tilde{w}_{on}$ はそれぞれ荷重 q_n, p_n に対する特解の影響値である。

ところで、 p_n は式（2）に示したように $w''_n \left(=\frac{d^2 w_n}{dx^2}\right)$ と w_n を含む、板としての特性を

Isao SHIMADA

示す付加力であり、荷重（q）と同種のものである。p_n の分布を図−2（b）のように、長さ（a）をm分割した小領域で等分布する力の集合として表わすと、i番目の力は

$$p_{ni}/\beta_n^2 - \{D_y\beta_n^2\cdot C_{1n} + D_y\beta_n^2\cdot C_{2n}x_i + (-4H+D_y\beta_n^2x_i^2)\cdot C_{3n} + (-12H+D_y\beta_n^2x_i^3)\cdot C_{4n}\}$$

$$+\sum_{j=1}^{m}(-2H\bar{w}''_{on} + D_y\beta_n^2\bar{w}_{on})_{ij}\cdot p_{nj} = p_{oni} \qquad (i=1\sim m) \quad \text{-----------------} \quad (4)$$

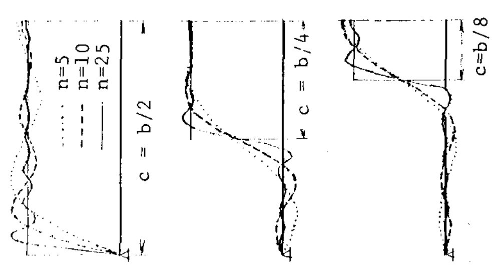
ここに、

$$p_{oni} = (-2H\tilde{w}''_{on} + D_y\beta_n^2\tilde{w}_{0n})_i\cdot q_n$$

となる。式（4）は、$p_{n1}\sim p_{nm}$ に関するm個の条件式を表わしている。さらに、x＝0、x＝aにおける4個の境界条件式を含めた連立方程式より、$C_{1n}\sim C_{4n}$, $p_{n1}\sim p_{nm}$ が q_n で表わされる。そして、式（2）より w_n に関する諸量が定まる。板の曲げモーメント式を示すと次式となる。

$$M_x = \sum_n\left(-D_x\frac{d^2w_n}{dx^2} - D_1\beta_n^2w_n\right)\cdot\sin(\beta_ny), \quad M_y = \sum_n\left(-D_1\frac{d^2w_n}{dx^2} - D_y\beta_n^2w_n\right)\cdot\sin(\beta_ny) \quad \text{--------} \quad (5)$$

３。計算例：　図−３は、荷重を級数展開した時の収束状況を表わしたものである。分布幅が b/4までの場合であるが、項数を２５項もとればほぼ荷重を表現している。図−４は、等分布荷重をうける正方形板（等方性）の計算例である。中央断面での p の分布および中央点のたわみと曲げモーメントを示した。pの分布を３等分割で表現したものでも良好な結果をえた。



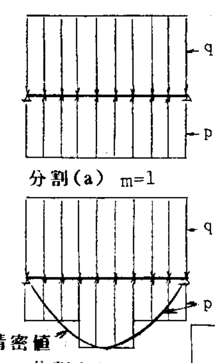
荷重状態（a）　荷重状態（b）　荷重状態（c）

中央点の荷重強度(×q)

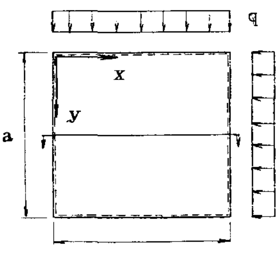
項数(n)	5	10	25
荷重(a)	1.104	1.063	1.024
荷重(b)	1.020	0.992	0.999
荷重(c)	1.115	1.130	1.049

$$q = q\sum_n\frac{4}{\beta_n}\sin(\beta_nc)\cdot\sin(\beta_nb/2)\cdot\sin(\beta_ny)$$

図−３　荷重(q) の級数表現



(n=25項)



付加力分布の近似と板の諸量

	p_{max} (×q)	w_{max} (×qa⁴/D)	M_{max} (×qa²)
分割(a)	0.759	0.0035	0.033 / 0.031
分割(b)	0.878	0.0042	0.041 / 0.037
精密値	0.873	0.0041	0.037 / 0.037

図−４　正方形板の計算例　ポアソン比＝0　(M_x／M_y)

４。あとがき：　板の微分方程式を梁の微分方程式の形にまとめ、梁の基本式をもちいて板作用の付加力を求めて板を解く方法を示した。ここに示した方法は、シャイベの問題にも同様に適用できる。また、並列にならんだ桁で支持された板構造の曲げや振動問題への拡張も容易に行なえる。