モードⅢ伸長クラックの変形への加速度の効果について

京都大学工学部　正　西村直志

1　序

線形破壊力学が実用の域に達し，最近では非線形効果や動的効果をとり入れた研究が行なわれている．本報では，解析の簡単なモードⅢの場合について，ある種の材料非線形性を持った物質が，どの様に加速度の影響を受けるかを考察し，さらに解がどの様な特性を示さねばならないかについて述べる．

2　基礎方程式

純剪断に於いて図1の様な挙動を示す非線形弾性体を考える．直交直線座標を，モードⅢに於ける変位方向が x_3 方向になる様に選んでおけば，応力 $S_\alpha := \tau_{3\alpha}$ は $(\alpha=1,2)$

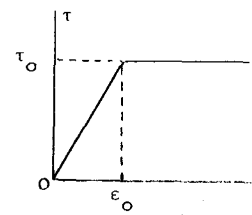

図1：構成関係

$$S = \begin{cases} \mu \nabla u & 0 \leq |\nabla u| < \varepsilon_0 \\ \tau_0 \dfrac{\nabla u}{|\nabla u|} & \varepsilon_0 \leq |\nabla u| \end{cases} \tag{1a,b}$$

と書ける．ここに u は変位，μ，τ_0，ε_0 は常数で $\tau_0 = \mu\varepsilon_0$ を満たす．運動方程式は

$$\mathrm{div}\, S = \rho \ddot{u} \tag{2}$$

である．ここに ρ は密度，˙は時間微分である．次に x_1 正方向に伸長するクラックを考え，その tip の座標を $(a,\ 0)$ とする．tip と伴に移動する座標 X を

$$X_1 = x_1 - a(t)\ ,\quad X_2 = x_2 \tag{3}$$

として導入すれば（以下空間に関する微分は X について行う）(2) は

$$\mathrm{div}\, S = \rho\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 - 2\dot{a}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial X_1} + \dot{a}^2\left(\frac{\partial}{\partial X_1}\right)^2 - \ddot{a}\frac{\partial}{\partial X_1}\right] u \tag{4}$$

となる．時に定常状態では

$$\mathrm{div}\, S = \dot{a}^2\left(\frac{\partial}{\partial X_1}\right)^2 u \tag{5}$$

となり，(1)，(5) は

$$(1-M^2)\frac{\partial^2 u}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial X_2^2} = 0 \qquad |\nabla u| < \varepsilon_0 \text{ のとき} \tag{6a}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - 2\,\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = \frac{M^2}{\varepsilon_0}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2\right\}^{3/2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}$$

$$|\nabla u| \geq \varepsilon_0 \text{ のとき} \qquad (6\,b)$$

と書き変えられる．ここに M（Mach 数）は

$$M^2 = \rho \dot{a}^2 / \mu \qquad (0 \leq M < 1) \qquad (7)$$

である．(6 a) は楕円形，(6 b) は双曲形である．境界条件は

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = 0 \quad \text{on} \quad \{(x_1, 0) \ : \ x_1 < 0\} \qquad (8)$$

および Small Scale "Yielding" 条件

$$u \longrightarrow \frac{2K_{\mathrm{III}}}{\mu(1-M^2)^{1/4}} R^{1/2} \sin \Theta/2 \quad \text{as} \quad R \to \infty \qquad (9)$$

とする．ここに K_{III} は応力拡大係数，R，Θ は点 $x_1/(1-M^2)^{1/2}$，x_2 の極座標である．

3　Crack line 上の解 [1]

tip 前方では少なくともあまり大きくない M については $|\nabla u| > \varepsilon_0$ が成立する領域があるであろう．そこでは (6 b) を x_2 で微分し，$x_2 = 0$ として得られる式

$$\varepsilon\ \varepsilon_{,11} - 2(\varepsilon_{,1})^2 = \frac{M^2}{\varepsilon_0}\,\varepsilon_{,11}\,\varepsilon^2 \qquad \left(\varepsilon := \frac{\partial u}{\partial x_2}\bigg|_{x_2=0}\right) \qquad (10)$$

が成立する．ここに $_{,1} := \frac{\partial}{\partial x_1}$．これを解くと

$$x_1 = c_1\left(\varepsilon - \frac{2\varepsilon_0}{M^2}\log\varepsilon - \frac{\varepsilon_0^2}{M^4\,\varepsilon}\right) + c_2 \qquad (11)$$

となり（c_1，c_2：積分定数）有限の x_1 では ε は無限大にならない．一方 (6 a) が成立すれば元より ε は有限である．よって Crack line 上では歪は有限である．

4　J 積分と解の滑かさ（Shock）

弾性体を考えているのであるから，J 積分

$$J = \int_c \left[\left\{W - \frac{1}{2}\rho\dot{a}^2\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2\right\}N_1 - (S\cdot N)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right] d\ell \qquad (12)$$

は Path independent である．ここに W は歪エネルギー密度，C は両クラック面を結ぶ Path，N は c の単位法線ベクトルである．一方，Crack 前方は歪が大きくなる事が予想される所であるから，そこで歪が有限であれば，tip 近傍の歪も有限と想像される．これは歪が滑かであれば $J = 0$ を意味し，一方 (9) からは $J = K_{\mathrm{III}}^2 / 2\mu(1-M^2)^{1/2}$ となり矛盾である．これは解が Shock を含むなど，古典的滑かさを有しない事を示唆している可能性がある．

文献　[1] J.D. Achenbach & N. Nishimura, J. Appl. Mech, 52, p281, 1985