

非線形弾性体の伸張亀裂についての考察

京都大学工学部 正会員 小林 昭一
 京都大学工学部 正会員 西村 直志
 京都大学大学院 学生会員 滝井 洋

(1)序文:本研究では、非線形弾性体にモードⅢの亀裂が発生した場合を想定し、今まで明らかにされていない亀裂近傍の特異性を有限要素法を用いて解析し、加速度項の影響を考察したものである。

(2)基礎方程式: 純剪断において右図の様は挙動を示す非線形弾性体を考える。

この時の基礎式は次のようになる[1]

$$\text{釣合い式: } \operatorname{div} S_{\alpha\beta} = \rho \ddot{u} = \rho c^2 u_{,11} \quad (2.1)$$

$$\text{構成式: } S_{\alpha\beta} = \mu \nabla u \quad (0 < |\nabla u| < \varepsilon_0) \quad (2.2a)$$

$$S_{\alpha\beta} = S_0 \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \quad (\varepsilon_0 \leq |\nabla u|) \quad (2.2b)$$

$$\text{上式より } (1-M^2)u_{,11} + u_{,22} = 0 \quad (|\nabla u| < \varepsilon_0) \quad (2.3)$$

$$(u_{,2})^2 u_{,11} - 2u_{,11} u_{,2} u_{,12} + (u_{,11})^2 u_{,22} = \frac{\rho c^2}{S_0} \left\{ (u_{,1})^2 + (u_{,2})^2 \right\}^{\frac{3}{2}} u_{,11} \quad (|\nabla u| \geq \varepsilon_0) \quad (2.4)$$

$$M^2 = \frac{\rho c^2}{\mu} \quad (M; \text{Mach 数}) \quad (2.5)$$

(3)数値解析法: この問題に有限要素法を適用し、Newton法により収束計算を行なう

ことにより数値解析を行なう。以下に定式化の過程を略述する。

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{D_1+D_2} \phi \cdot (S_{\alpha\beta} u_{,\alpha} - \rho c^2 u_{,11}) dV \\ &= \int_{\partial D_1} \phi (S_{\alpha\beta} n_{\alpha} - \rho c^2 u_{,11}) dS + \int_{\partial D_2} \phi (S_{\alpha\beta} n_{\alpha} - \rho c^2 u_{,11}) dS \\ &\quad - \int_{D_1+D_2} (\phi_{,\alpha} S_{\alpha\beta} - \rho c^2 \phi_{,1} u_{,11}) dV \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} &= - \int_S \phi \{ S_{\alpha\beta} n_{\alpha} - \rho c^2 u_{,11} \}^+ dS + \int_S \phi \{ S_{\alpha\beta} n_{\alpha} - \rho c^2 u_{,11} \}^- dS - \int_{D_1+D_2} (\phi_{,\alpha} S_{\alpha\beta} - \rho c^2 \phi_{,1} u_{,11}) dV \\ &= \int_{D_1+D_2} \{ \phi_{,\alpha} S_{\alpha\beta} - \rho c^2 \phi_{,1} u_{,11} \} dV \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$= \int_{D_1} \{ u_{,\alpha} \phi_{,\alpha} - M^2 \phi_{,1} u_{,11} \} dV + \int_{D_2} \{ \varepsilon_0 \phi_{,1} u_{,\alpha} / (u_{,\beta} u_{,\beta})^{\frac{1}{2}} - M^2 \phi_{,1} u_{,11} \} dV \quad (3.3)$$

$\phi = N$ (N ; 形状関数) とし

$$W^I = \int_{D_1} u_{,\alpha} N_{,\alpha}^I - M^2 u_{,11} N_{,1}^I dV + \int_{D_2} \varepsilon_0 u_{,\alpha} N_{,\alpha}^I / (u_{,\beta} u_{,\beta})^{\frac{1}{2}} - M^2 u_{,11} N_{,1}^I dV \quad \text{とおく。} \quad (3.4)$$

一方、有限要素法の適用から $u_{,\alpha} = \sum_i N_{,\alpha}^i u^i$, さらに $\frac{\partial u_{,\alpha}}{\partial u^j} = N_{,\alpha}^j$ とし

$$\therefore \frac{\partial W^I}{\partial u^j} = \int_{D_1} N_{,\alpha}^j N_{,\alpha}^I - M^2 N_{,1}^j N_{,1}^I dV + \int_{D_2} \varepsilon_0 N_{,\alpha}^j N_{,\alpha}^I / (u_{,\beta} u_{,\beta})^{\frac{1}{2}} - \varepsilon_0 u_{,\beta} N_{,\beta}^j N_{,\alpha}^I u_{,\alpha} / (u_{,\beta} u_{,\beta})^{\frac{3}{2}} - M^2 N_{,1}^j N_{,1}^I dV \quad (3.5)$$

$$0 = W^I(u_0 + \delta u^J) \text{ と考えると, } W^I(u_0) + \frac{\partial W^I}{\partial \delta u^J} \delta u^J = 0 \quad \therefore \frac{\partial W^I}{\partial \delta u^J} \delta u^J = -W^I(u_0) \quad (3.6)$$

(3.4), (3.5), (3.6) の3式により計算を行なう。

尚、 D_1, D_2 はそれぞれ $|\nabla u| < \varepsilon_0, \varepsilon_0 \leq |\nabla u|$ の領域を示し、 ∂ はその境界を示している。(右上図参照)

(4)解析結果と考察: $M = 0.2$ 程度までは収束させることができた。紙面の都合上、結果の一部分を示すことにする。(詳細は当日発表の予定である。) 解析結果より、疑似塑性性は Mach 数の増大と共に減少する傾向にある。また Mach 数が大きくなると亀裂先端より変位の不連続面が発生しているようである。しかしこれらの結果はメッシュ分割の影響を受けやすく、まだ多くの検討余地が残されている。

参考文献: [1] J. D. Achenbach & N. Nishimura, J. Appl. Mech. 52 p 281, 1985

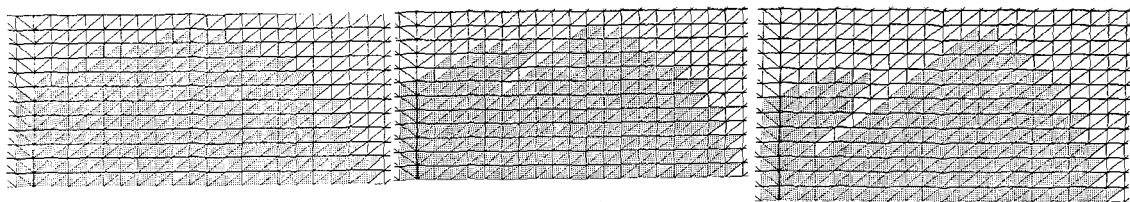


Fig. 1-a(M=0.0)

Fig. 1-b(M=0.1)

Fig. 1-c(M=0.12)

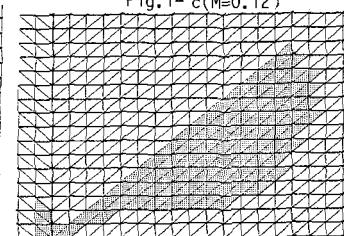
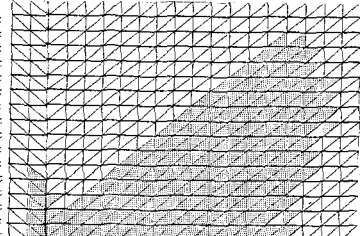
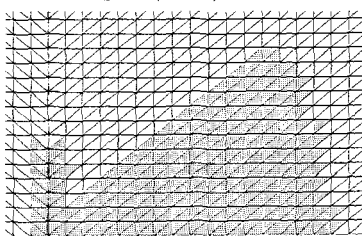


Fig. 1-d(M=0.14)

Fig. 1-e(M=0.15)

Fig. 1-f(M=0.16)

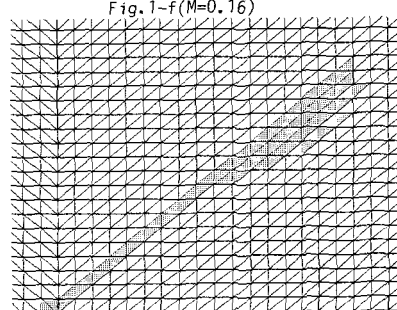
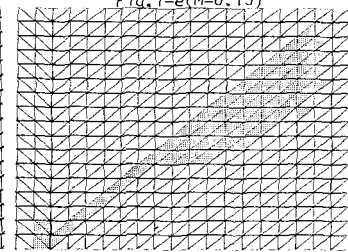
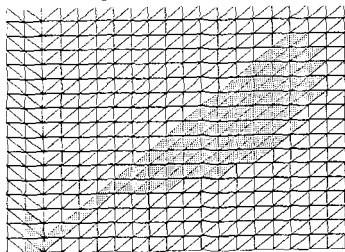


Fig. 1-g(M=0.17)

Fig. 1-h(M=0.18)

Fig. 1-i(M=0.20)

Fig 1 a ~ i は Mach 数による塑性域の変化の様子を示したものである。

解析に用いたメッシュは節点数 1770、要素数 3364。

Fig 2 は $M = 0.175$ の時の 2 種類のメッシュによる解析結果である。

a は 塑性域を示した物、b は 変形状態を示したものである。

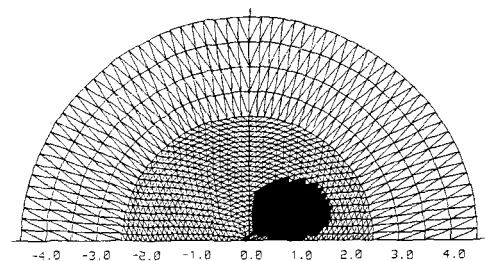


Fig. 2-1.a

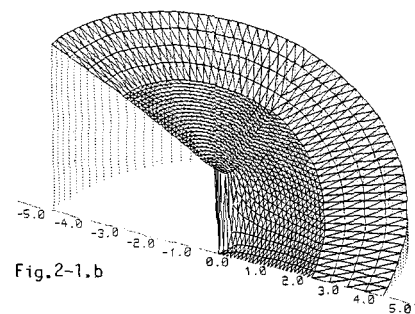


Fig. 2-1.b

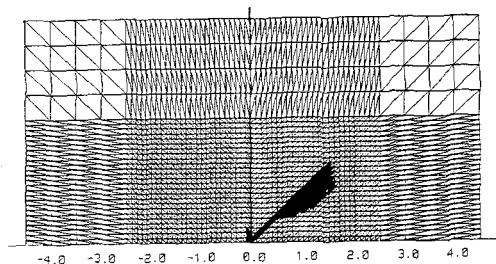


Fig. 2-2a

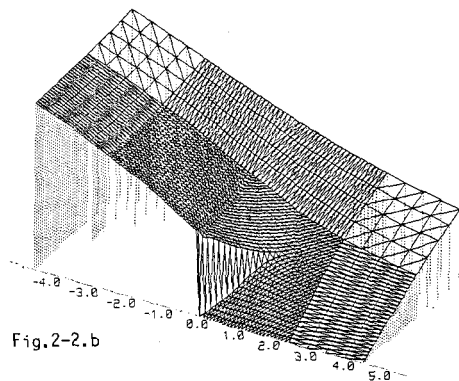


Fig. 2-2.b

2-1

節点数: 1016

要素数: 1910

2-2

節点数: 1770

要素数: 3364