

Born 近似による弾性波動の逆問題の解析

鴻池組	正員	○喜多秀樹
京都大学工学部	正員	丹羽義次
京都大学工学部	正員	廣瀬壮一

1. はじめに

本研究は、弾性波動の分野における逆問題を扱ったものである。逆問題の解析法は、各分野において様々な方法が考案されているが、本研究では、散乱波動自体のもつ特徴を大いに生かし、より解析的な手法によって逆問題を解析する。すなわち、本研究は、積分方程式による解表現に、Born 近似等の近似を導入し、散乱波を特性関数なる場所の関数と結びつけることによって、弾性体内に存在する異質物 (Inclusion、または Cavity) の形状を、数値実験的に明らかにしようと試みるものである。

2. 解析仮定

Fig. 1 に示すように、2次元無限均質等方弾性体 D^0 内に、散乱体 D (Inclusion、または Cavity) が存在すると仮定する。また、それらの弾性定数、および密度は既知であるものとする。($^{\circ}$ は D^0 内の量を表す。)

境界 ∂D 上の境界条件は、Inclusion の場合、変位と応力 vector の連続性で、Cavity の場合、応力 vector が 0 となる条件で与えられる。

入射波 u^i は、点 x_0 における集中物体力を震源とする円筒波であるとし、点 x ($\in D^0$) において散乱波を観測する。また、点 x_0 、および点 x は、 D の代表長に比べ、十分遠方にある (Farfield にある) とする。

さらに、本研究では、入射-観測の方法として、例えば、点 x_0 において P 波を入射し、点 x において散乱波の P 波成分のみを検出するものとする。(P-P Scattering と呼ぶ。) 従って、2次元面内問題を扱った本研究では、その他の入射-観測法として、SV-SV、P-SV、および SV-P Scattering の各ケースが考えられる。

上記の様な仮定の下で、点 x で観測される散乱波 $u^s(x)$ から、散乱体 D の形状決定を試みる。なお、 $u^s(x)$ は、境界積分方程式法によって数値解析し、得るものとした。

3. 逆問題としての定式化

3-1. 散乱波の積分表現 Inclusion D による、点 x における散乱波 $u^s(x)$ は、動弾性問題の基本解 $U_i^j(x, y)$ を用いて、次の様に表わされる。

$$u_i^s(x, y) = \int_D [\bar{\rho} \omega^j U_i^j(x, y) u_{j,e}(y, y_0) - \bar{C}_{jklm} U_i^j(x, y) u_{j,e}(y, y_0)] dS_y \quad (1)$$

ただし、 ω 、 $\bar{C}$ はそれぞれ、角振動数、全変位 ($u + u^s$) であり、 $\bar{\rho}$ はそれぞれの量の、対応する D^0 内の値からの増分を表わす。(例えば、 $\bar{\rho} = \rho - \rho^0$) また、 j, m が座標 x_m に関する微分を表わす。

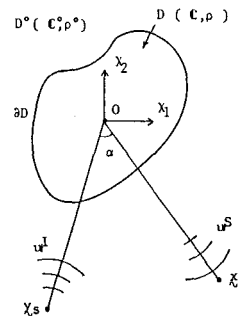


Fig. 1 Scatterer D in an Infinite Space D^0

3-2. Farfield 近似と Born 近似

2つの近似を導入して、式(1)を変形する。まず、2節で述べた仮定より、基本解 U_1^0 の Farfield 項のみを考慮する。(Farfield 近似) 次に、散乱体 D 内における全変位 u は、第1次近似として入射波の変位 u^i に等しいと仮定する。(Born 近似) また、 D が Cavity の場合は、境界 ∂D 上の全変位が、入射波の変位に等しいと近似する。以上の仮定から、散乱波は次の様な表現となる。

$$u_r^s(x, y_0) \approx i\mu^0 \left(\frac{k_L}{4\rho\omega^2} \right)^2 \frac{2}{\pi k_L \sqrt{r_0}} e^{ik_L(r+r_0)} (\bar{\rho}\omega^2 \hat{x}_j \hat{y}_j + k_L \bar{C}_{jklm} \hat{x}_j \hat{x}_l \hat{y}_k \hat{y}_m) \cdot \int_D e^{-ik_L(\hat{x}+\hat{y}_s) \cdot \hat{x}} dS_x \quad (2)$$

ただし、上式は P-P Scattering の場合であり、 u_r^s は散乱波の P 波成分を表わす。また、 k_L, k_T はそれぞれ、P 波と SV 波の波数、 r, r_0 、および、 $\hat{x}, \hat{y}_s$ はそれぞれ、vector x, y_s の大きさ、および単位 vector を表わす。なお、 D が Cavity の場合は、 $\bar{C}_{jklm}$ と $\bar{\rho}$ をそれぞれ、 $-C_{jklm}$ と $-\rho^0$ に置換えた形式で表現される。

3-3. 特性関数 ここに、 $\chi(X) = 0$ ($X \in D^0$), $\chi(X) = 1$ ($X \in D$) なる特性関数を定義し、その Fourier 変換を考えると、

$$\Gamma(a) = \int_{D \cup D^0} \chi(X) e^{-ia \cdot X} dS_X = \int_D e^{-ia \cdot X} dS_X \quad (3)$$

となり、 $a = k_L(\hat{x} + \hat{y}_s)$ の関係の下で、式(2)右辺の積分と同値である。従って、上式の逆 Fourier 変換を考え、式(2)を代入すると、

$$\chi(X) = -\frac{2}{\pi} \left(\frac{k_L^2}{k_L^2} \right) \frac{k_L \sqrt{r_0}}{k_T \left(\frac{\rho\omega^2}{\mu k_L^2} \hat{x}_j \hat{y}_j + \frac{k_L}{k_T} \bar{C}_{jklm} \hat{x}_j \hat{x}_l \hat{y}_k \hat{y}_m \right)} \int_0^\infty e^{ik_L(r_0)} \int_0^{2\pi} u_r^s(x) e^{ik_L(\hat{x}+\hat{y}_s) \cdot X} d\theta dk_r \quad (4)$$

となる。すなわち、式(4)によつて、散乱波 $u_r^s(x)$ より $\chi(X)$ を再構成することができ、この関数の性質から、散乱体 D の形状表現が可能となる。

4. 数値解析例

Fig. 2 の様に、散乱体 D の形状が円形で、しかもその中心が原点と一致する場合は、特性関数が半径方向の距離だけの関数となり、1次元問題に帰着される。Fig. 3, Fig. 4 は、その場合の解析例であり、破線は、求められるべき特性関数を表わす。Fig. 5, Fig. 6 は、それぞれ、散乱体 D が Inclusion, Cavity の場合の特性関数の分布である。いずれも2次元問題として解析し、Fig. 5, Fig. 6 であり、おおよそ、 D の形状が把握できていることがわかる。なお、上述の近似の精度により、様々なパラメータが、特性関数に大きく影響するが、特性関数を修正することによって、よりよい精度でその分布が得られることが明らかとなっている。

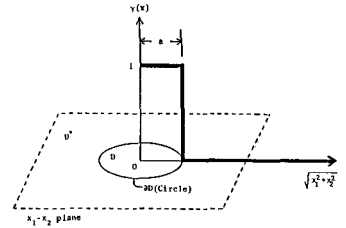


Fig. 2 Characteristic Function of One Dimension

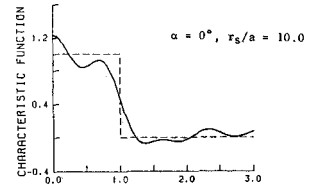


Fig. 3 Characteristic Function of One Dimension (Cavity, P-P Scattering)

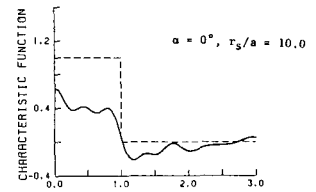


Fig. 4 Characteristic Function of One Dimension (Cavity, SV-SV Scattering)

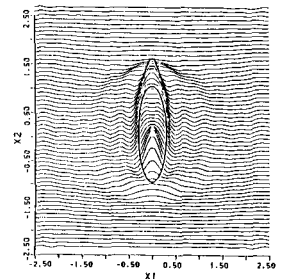


Fig. 5 Characteristic Function of Two Dimensions (Inclusion, SV-SV Scattering, $\mu^0/\mu = 0.7$)

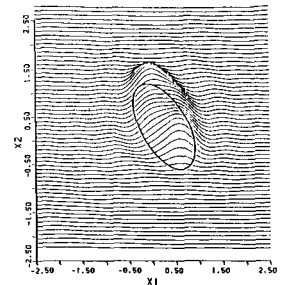


Fig. 6 Characteristic Function of Two Dimensions (Cavity, P-P Scattering)