積分方程式法による３次元動粘弾性問題について

京都大学工学部　正員　小林　昭一
京都大学工学部　正員　西村　直志
京都大学大学院　学生員　○山口　耕治

はじめに

３次元の弾性体材料の無限領域内に、粘弾性体材料が塊状に閉じこめられている状態を想定し、定常波を入射する事で、その動的応答を数値的に解析したのが本研究である。数値解析の方法として、積分方程式法と有限要素法を結合する方法を用いた。

粘弾性材料

線型粘弾性材料は、荷重と変位の線型性を保持したまま、しかも時間に依存するような材料である。その応力－ひずみ関係は次のような式で表わされる。

$$\sigma(t)=\int_0^\infty G(t)\,\varepsilon(t-\tau)\,d\tau \qquad \text{—— (1)}$$

$\sigma(t)$, $\varepsilon(t)$は時間tでの応力、ひずみであり　$G(t)$は緩和関数である。

ここで運動を円振動数ωの定常な調和運動に限ると、ひずみ$\varepsilon(t)$は複素表現を用いて、次のように書ける。

$$\varepsilon(t)=\varepsilon_0 e^{-i\omega t} \qquad \text{—— (2)}$$

ε_0は時間に依存しない複素量である。1式に2式を代入し、又、$t<0$で$G(t)=0$(不遡及の公理)より　積分の下限を$-\infty$に置き換えると次のようになる。

$$\sigma(t)=\varepsilon_0 e^{-i\omega t}\int_{-\infty}^{\infty} G(\tau)\,e^{i\omega\tau}\,d\tau=\hat{G}(t)\,\varepsilon(t) \qquad \text{—— (3)}$$

$\hat{G}(t)$はフーリエ変換された緩和関数である。3式はHookの法則と同形で、このように、粘弾性問題は、変換された面において弾性問題と同一に扱える。(対応の原理)

粘弾性モデルとしてFig. 1に示すような標準線型モデルを選んだ。K_1, K_2は弾性定数、ηは粘性係数である。このモデルの応力－ひずみ式をフーリエ変換して、$\hat{G}(t)$を得ると、3式は次のように表わされる。

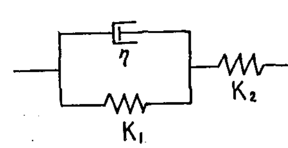

Fig. 1

$$\sigma_{ij}(t)=\hat{G}_{ijkl}(t)\,\varepsilon_{kl}(t)=\lambda\frac{\tau\omega+i\gamma}{\tau\omega+i}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}+2\mu\frac{\tau\omega+i\gamma}{\tau\omega+i}\varepsilon_{ij} \qquad \text{—— (4)}$$

ここでλ, μはLamé定数であり、τ, γは次のように定義される。

$$\tau=\frac{\eta}{K_1+K_2}\;,\qquad \gamma=\frac{K_1}{K_1+K_2} \qquad \text{—— (5)}$$

定式化

i) 積分方程式法

Shoichi KOBAYASHI, Naoshi NISHIMURA, Koji YAMAGUCHI

本研究では外部の弾性体には積分方程式法を用いている。
3次元弾性体の定常運動の基本解は、次のように与えられる。

$$\Gamma_i^{(k)}(x,y)=\frac{1}{4\pi\mu}\left[\frac{e^{ik_T r}}{r}\delta_{ik}+\frac{1}{k_T^2}\left(\frac{e^{ik_T r}}{r}-\frac{e^{ik_L r}}{r}\right)_{,ij}\right] \qquad (6)$$

Bettiの式として知られる関係式に上式の基本解を用いると、次のような積分方程式が得られる。

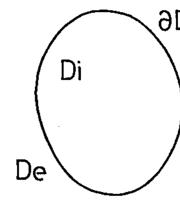

Fig. 2

$$D(x)u_k(x)=\int_{\partial D}\left[\Gamma_i^{(k)}(x,y)t_i(y)-u_i(y)\tilde{\Gamma}_i^{(k)}(x,y)\right]dS_y,\quad D(x)=\begin{cases}1 & x\in De\\ 1/2 & x\in\partial D\\ 0 & x\notin De\end{cases} \qquad (7)$$

ii) 有限要素法

内部の粘弾性体には有限要素法を用いている。
形状関数 N を導入して、剛性マトリックス $\int_D B^T D B\,dV$、質量マトリックス $\int_D N^T N\,dV$ を用いて、3次元弾性体の定常運動では、次の式が成り立つ。

$$\left(\int_D B^T D B\,dV-\rho\omega^2\int_D N^T N\,dV\right)\mathbf{u}=\left(\int_{\partial D}N^T N\,dS\right)\mathbf{t} \qquad (8)$$

iii) 結合

境界上での変位の連続条件、表面力のつりあい条件は次のようである。

$$\begin{cases}t_i=-t_e\\ u_i=u_e\end{cases}$$
（i, e の添字は内部側外部側の別）

この条件を用いて、積分方程式法と有限要素法を連立させた一つの方程式系ができ、それを解くことにより、変位、表面力を求められる。

適用例

粘弾性体の形状はFig.3に示すように、球形とした。Fig.4は、円振動数を変えた時の各点の変位の絶対値がどう変化するかを示した。詳細は当日発表する予定である。

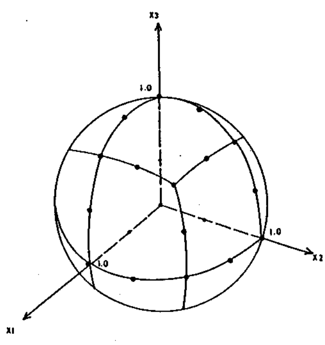

Fig. 3

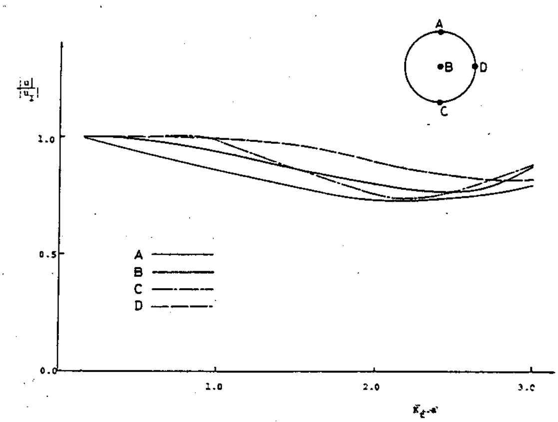

Fig. 4