積分方程式法による異方性弾性体の動的解析

京都大学工学部　正員　小林昭一
京都大学工学部　正員　西村直志
建　設　省　正員　○木嶋　健

1．はじめに

動弾性の初期値、境界値問題を積分方程式法で数値解析している例は多い。しかし、その解析例の多くは等方性を扱ったものである。そこで本研究では、二次元直交異方性弾性体の波動伝播問題に対して、積分方程式法を用いて数値解析を行なった。ここでは、解析モデルとして、半無限弾性体を考える。

2．基礎方程式

二次元直交異方性弾性体における動弾性の基礎方程式は次のようになる。

$$\Delta^*_{\alpha\beta} u_\beta(x,t) = \rho \ddot{u}_\alpha(x,t) \qquad (x,t)\in D\times[0,\infty) \qquad (D\subset\mathbb{R}^2) \tag{1}$$

$$\Delta^*_{11} = C_{11}\partial_1\partial_1 + C_{44}\partial_2\partial_2 \qquad \Delta^*_{12} = \Delta^*_{21} = (C_{12}+C_{44})\partial_1\partial_2 \qquad \Delta^*_{22} = C_{44}\partial_1\partial_1 + C_{22}\partial_2\partial_2$$

$$[\ (\ddot{\ }) : \partial^2/\partial t^2\ ,\ \ \partial_i : \partial/\partial x_i\ ]$$

ここに、$C_{11}, C_{12}, C_{22}, C_{44}$ は弾性定数であり、応力-ひずみ関係式は次のように表わされる。

$$\tau_{11} = C_{11}\varepsilon_{11} + C_{12}\varepsilon_{22} \qquad \tau_{22} = C_{12}\varepsilon_{11} + C_{22}\varepsilon_{22} \qquad \tau_{12} = 2C_{44}\varepsilon_{12}$$

3．積分方程式法

二次元直交異方性弾性体の基本解 $v^{(\beta)}_\alpha$ は、次のような式で与えられる。

$$\left(\Delta^*_{\alpha\gamma} - \rho\delta_{\alpha\gamma}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) v^{(\beta)}_\gamma(x,t) = -\delta(x)\delta(t) \tag{2}$$

これより、$v^{(\beta)}_\alpha$ を計算すると次のようになる。[1]

$$v^{(1)}_1(x,t) = \frac{-i}{\pi\tau}\sum_\alpha^{\text{上}} \mathrm{Res}\left[\frac{1}{C_{44}}\cdot\frac{-K(z,1,\frac{x_1}{\tau}z+\frac{x_2}{\tau})}{Q(z,1,\frac{x_1}{\tau}z+\frac{x_2}{\tau})}\right]_{z=z_\alpha} \qquad v^{(2)}_2(x,t) = \frac{-i}{\pi\tau}\sum_\alpha^{\text{上}} \mathrm{Res}\left[\frac{1}{C_{44}}\cdot\frac{-N(z,1,\frac{x_1}{\tau}z+\frac{x_2}{\tau})}{Q(z,1,\frac{x_1}{\tau}z+\frac{x_2}{\tau})}\right]_{z=z_\alpha}$$

$$v^{(2)}_1(x,t) = v^{(1)}_2(x,t) = \frac{-i}{\pi\tau}\sum_\alpha^{\text{上}} \mathrm{Res}\left[\frac{1}{C_{44}}\cdot\frac{\kappa z}{Q(z,1,\frac{x_1}{\tau}z+\frac{x_2}{\tau})}\right]_{z=z_\alpha} \tag{3}$$

$$Q(a,b,c) = \alpha a^4 + \gamma a^2 b^2 + \beta b^4 - (\alpha+1)a^2c^2 - (\beta+1)b^2c^2 + c^4$$

$$N(a,b,c) = \alpha a^2 + b^2 - c^2$$

$$K(a,b,c) = a^2 + \beta b^2 - c^2$$

$$\alpha = C_{11}/C_{44} \qquad \beta = C_{22}/C_{44} \qquad \gamma = 1+\alpha\beta-(C_{12}/C_{44}+1)^2 \qquad \kappa = (1+\alpha\beta-\gamma)^{\frac{1}{2}}$$

$$\tau = \sqrt{C_{44}/\rho}\,t$$

$\mathrm{Res}[\ ]$ は留数を表わし、$\sum_\alpha^{\text{上}}\mathrm{Res}[\ ]_\alpha$ は、上半平面における留数和を示している。

二重層核 $T_{\alpha\gamma}v^{(\beta)}_\gamma$ は、$\sigma^{(\beta)}_{\alpha\gamma}n_\gamma$ と表わすことができる。この場合には、$\sigma^{(\beta)}_{\alpha\gamma}$ の計算を行なって二重層核を求めることにする。なお、この計算には $\delta(t)$ のかわりに $H(t)$ を用いる。

$$\sigma^{(\beta)}_{\alpha\gamma}(x,t) = \frac{i}{\pi\tau}\sum_\alpha^{\text{上}} \mathrm{Res}\left[\frac{M^{(\beta)}_{\alpha\gamma}(z,1,\frac{x_1}{\tau}z+\frac{x_2}{\tau})}{Q(z,1,\frac{x_1}{\tau}z+\frac{x_2}{\tau})}\cdot\frac{z}{\frac{x_1}{\tau}z+\frac{x_2}{\tau}}\right]_{z=z_\alpha} \qquad (\alpha+\beta+\gamma : \text{奇数})$$

Shoichi KOBAYASHI　Naoshi NISHIMURA　Takeshi KISHIMA

$$\sigma_{\alpha\gamma}^{(\beta)}(x,t) = \frac{i}{\pi\tau}\sum_{\alpha}^{2} \mathrm{Res}\left[\frac{M_{\alpha\gamma}^{(\beta)}(z, 1, \frac{x_1}{\tau}z + \frac{x_2}{\tau})}{Q(z, 1, \frac{x_1}{\tau}z + \frac{x_2}{\tau})} \cdot \frac{1}{\frac{x_1}{\tau}z + \frac{x_2}{\tau}} \right]_{z=z_\alpha} \qquad (\alpha+\beta+\gamma : \text{偶数}) \tag{4}$$

$M_{11}^{(1)} = -\alpha K + \kappa(\kappa-1)\partial_2\partial_2 \qquad M_{11}^{(2)} = -(\kappa-1)N + \alpha\kappa\,\partial_1\partial_1$

$M_{22}^{(1)} = \beta\kappa\,\partial_2\partial_2 - (\kappa-1)K \qquad M_{22}^{(2)} = -\beta N + \kappa(\kappa-1)\partial_1\partial_1$

$M_{12}^{(1)} = \kappa\,\partial_1\partial_1 - K \qquad M_{12}^{(2)} = -N + \kappa\,\partial_2\partial_2$

時間空間領域における積分方程式は、相反定理等を用いることにより、容易に得ることができる。初期変位 $u_\alpha(x,0)$，初期速度 $\dot{u}_\alpha(x,0)$ が共に 0 である場合には、次のような境界のみの積分方程式になる。

$$\frac{1}{2}u_\beta(\xi,s) = \int_0^s\int_{\partial D} U_\alpha^{(\beta)}(\xi-x, s-t)\,\overset{n}{T}_{\alpha\gamma}u_\gamma(x,t)\,dS(x)\,dt - \int_0^s\int_{\partial D}\sigma_{\alpha\gamma}^{(\beta)}(\xi-x,s-t)\,n_\gamma\,\dot{u}_\alpha(x,t)\,dS(x)\,dt \qquad (\xi\in\partial D) \tag{5}$$

4．半無限弾性体への適用

半無限弾性体上の波動伝播を (5) 式を用いて数値解析する。解析解と比較するために、ここでは、空間的に一様な表面力を作用させた場合に、変位がどのように変動するかという問題に対して数値計算を行なう。

(i) 解析解

半無限弾性体上に、鉛直方向成分のみをもつ空間的に一様な表面力を作用させた場合、その影響は平面波として鉛直下方に伝わっていく。これを用いると、半無限弾性体上における変位は容易に求められる。表面力として、

$t_1(x,t)|_{x_2=0} = 0 \qquad t_2(x,t)|_{x_2=0} = -\sqrt{\rho C_{22}}\,\sin t$

を考えると、変位は次のようになる。

$u_1(x,t)|_{x_2=0} = 0 \qquad u_2(x,t)|_{x_2=0} = -1 + \cos t$

（$u(x,0)|_{x_2=0} = 0$，$\dot{u}(x,0)|_{x_2=0} = 0$ である。）

(ii) 計算結果

Fig.1, Fig.2は、解析解と計算結果との比較である。実線が解析解を表わし、プロット点が計算結果を表わしている。計算条件は以下に示す通りである。

Fig.1　$C_{11} = 2.07$　$C_{22} = 1.8$　$C_{12} = 0.086$　$C_{44} = 1.0$　$\rho = 1.0$　$CT/X = 1.0$

Fig.2　$C_{11} = 1.57$　$C_{22} = 4.17$　$C_{12} = 1.26$　$C_{44} = 1.0$　$\rho = 1.0$　$CT/X = 1.0$

（C：速い波の速度、T：時間軸上の１ステップの長さ　X：空間上の１要素の長さ）

図の横軸方向にはステップ数 k をとり、時刻 t との間に $t = \frac{\pi}{10}k$ の関係がある。

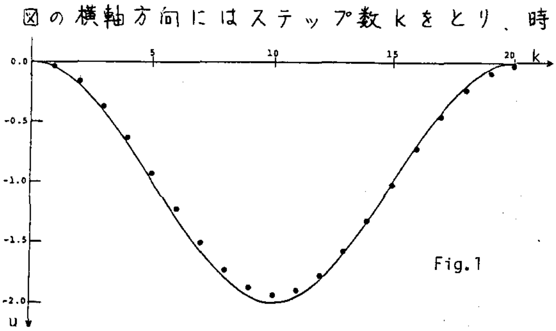

Fig.1

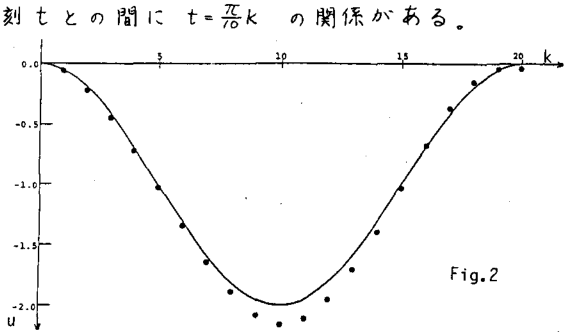

Fig.2

参考文献　1) R.G. Payton ; Elastic wave propagation in transversely isotropic media