積分方程式を用いた圧密の数値解析

川崎重工業　　　正会員○梅田　聡
京都大学工学部　正会員　小林昭一
京都大学工学部　正会員　西村直志

1．序

本研究では，積分方程式による Biot の圧密理論の数値解析法を定式化する．さらに，この方法に基づく数値解析例として２次元等方弾性体の場合の例を示し，積分方程式法の有効性について述べる．

2．定式化

Biot の圧密理論の式は次のとおりである．

$$\Delta^* u - \nabla P = -f \quad , \quad \nabla\cdot\dot{u} - k\Delta P = g \qquad in\ D \qquad (1.(a)(b))$$

ただし，$\Delta^* u = div\,C[\nabla u]$　特に等方弾性体では，$\Delta^* u = \mu\Delta u + (\lambda+\mu)\nabla div\, u$

$$g = -\rho_f k \nabla F$$

ここに，D は滑らかな境界 ∂D をもつ領域，u は変位，P は水圧，f は物体力，ρ_f は水の密度，k は透水係数，$\dot{}$ は時間微分，C は弾性常数，また，λ，μ は Lamé 常数である．

次に，初期条件，境界条件を示す．

$$\nabla\cdot u|_{t=0} = \theta \qquad in\ D \qquad (2.)$$

$$\begin{array}{lll} u = u_0 & on\ \partial D_u & \left(\begin{array}{l}\overline{\partial D_u \cup \partial D_s} = \partial D \\ \partial D_u \cap \partial D_s = \phi\end{array}\right) \\ S(\text{表面力}) = S_0 & on\ \partial D_s & \\ P = P_0 & on\ \partial D_p & \left(\begin{array}{l}\overline{\partial D_p \cup \partial D_r} = \partial D \\ \partial D_p \cap \partial D_r = \phi\end{array}\right) \\ r : -k\frac{\partial P}{\partial n} = r_0 & on\ \partial D_r & \end{array} \qquad (3.(a)\sim(d))$$

なお，θ，u_0，S_0，P_0，r_0 は与えられた関数である．

これらを満たす u，P を求めるために，(1) 式の基本解を用いれば，u，P は次のようになる．

$$u = \tilde{u} \quad , \quad P = \tilde{P} \qquad in\ D$$

$$u = 0 \quad , \quad P = 0 \qquad out\ of\ D \qquad (4.(a)(b))$$

ここでは，$\tilde{u}$ についてのみ表示する．なお，２次元等方弾性体について考える．

$$\begin{aligned}\tilde{u}(x,t) =& \int_{\partial D} U_0(x-y)S(y,t) - \int_{\partial D} S_0(x,y)u(y,t) + \int_D U_0(x-y)f(y,t) \\ &+\int_{\partial D}\int_0^t \dot{U}(x-y,t-s)S(y,s) - \int_{\partial D}\int_0^t \dot{S}(x,t,t-s)u(y,s) - \int_{\partial D}\int_0^t P(x-y,t-s)r(y,s) \\ &+\int_{\partial D}\int_0^t R(x,y,t-s)P(y,s) + \int_D\int_0^t \dot{U}(x-y,t-s)f(y,s) \qquad (5.) \\ &+\int_D\int_0^t P(x-y,t-s)g(y,s) + \int_D P(x-y,t)\theta(y) \qquad (\,ds,\ dS,\ dV\ \text{は省略した。})\end{aligned}$$

Akira UMEDA,　Shoichi KOBAYASHI,　Naoshi NISHIMURA

ただし, $U_0(x-y) = -\frac{1}{4\pi\mu}\left(1\log R - \nabla R\otimes\nabla R\right)$, $\quad S_0(x,y) = \frac{1}{\pi R}\frac{\partial R}{\partial n_y}\nabla R\otimes\nabla R$

$$\dot{U}(x-y,t) = \frac{k}{\pi}\left[1\left(\frac{1-\exp}{2R^2}\right) - \nabla R\otimes\nabla R\left(\frac{1-\exp}{R^2} - \frac{\exp}{4C_v t}\right)\right]$$

$$\dot{S}(x,y,t) = -\frac{2\mu k}{\pi R}\left\{\left[\left(1-4\nabla R\otimes\nabla R\right)\frac{\partial R}{\partial n_y} + n_y\otimes\nabla R + \nabla R\otimes n_y\right]\cdot\left(\frac{\exp}{4C_v t} - \frac{1-\exp}{R^2}\right) + \left(\nabla R\otimes n_y - \nabla R\otimes\nabla R\frac{\partial R}{\partial n_y}\right)\frac{R^2\exp}{8C_v^2 t^2}\right\}$$

$$P(x-y,t) = \frac{1-\exp}{2\pi R}\nabla R \quad , \quad R(x,y,t) = -\frac{k}{\pi}\frac{\partial}{\partial n_y}\left[\left(\frac{1-\exp}{2R}\right)\nabla R\right]$$

なお, $C_v = k(\lambda+2\mu)$, $R=|x-y|$, $\exp = e^{-R^2/4C_v t}$

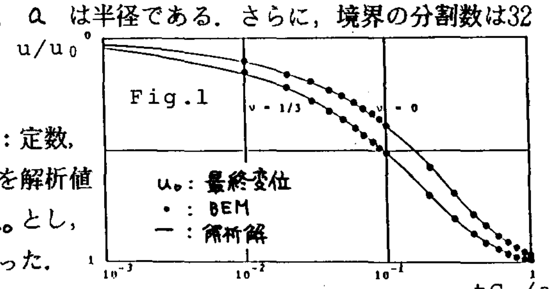
ここで点 x を境界 ∂D に極限移行し, 境界条件を用いると境界積分方程式が得られる. この式を離散化すると数値解析が可能となる.

3. 数値解析

2. で述べた数値解析法に基づく例を以下で示す. なお, 初期条件は $\theta=0$ (瞬間載荷) $\partial D = \partial D_s = \partial D_p$とし, 境界条件として $p=0$ とした. また, 境界要素としては線形アイソパラメトリック要素を用いた. 時間方向の変化は線形とし, 時間積分は解析的に行い, 領域積分は, Gauss 積分を用い, 特異積分については剛体変位を用いて評価した. 時間増分 Δt は, $\Delta t C_v/a^2 = 1/100$ or $1/10$ として固定した. なお, a は半径である. さらに, 境界の分割数は32点等分割とした.

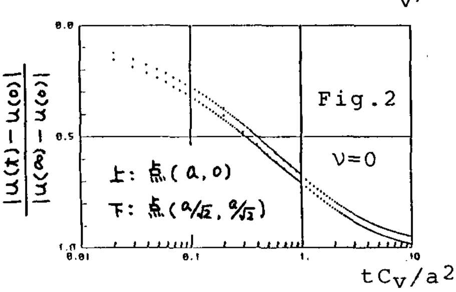
3. 1 円板

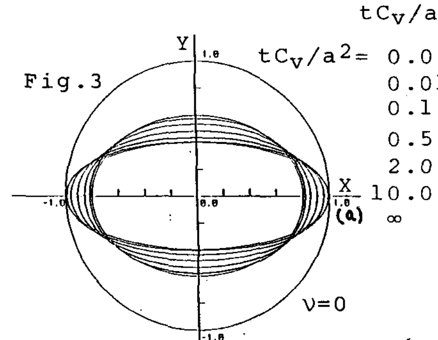
半径 a の円板が境界条件 $S=-P_0 n$ (P_0 : 定数, n : 単位法線ベクトル) の場合の表面変位を解析値と比較した (Fig.1) . なお, $\Delta t C_v/a^2 = 1/100$ とし, ポアソン比が 0 , $1/3$ の2通りについて行った.



3. 2 2軸応力を受ける円孔

外部問題として, 遠方で $\tau_{11} = -0.4P_0$, $\tau_{22} = -0.8P_0$ であり, ∂D 上で $S=0$ を満たす半径 a の円孔の解析する. $\Delta t C_v/a^2 = 1/100$ として, $0 < tC_v/a^2 < 1$ の間を解析し, $\Delta t C_v/a^2 = 1/10$ として, $0 < tC_v/a^2 < 10$ の間の計算を行い, 両者をプロットした (Fig.2) . また, Fig.3 は円孔の変形形状を表し, 偏平度の小さいものから順に $tC_v/a^2 = 0, 0.01, 0.1, 0.5, 2.0, 10, \infty$ での変形である.





その他の結果は当日発表する.

参考文献

西村, 小林 第17回土質工学会研究発表会論文集 P153, 1982

小林, 西村 第18回土質工学会研究発表会論文集 P229, 1983