

半無限弾性体中の空洞による三次元波動散乱問題の解析

奥村組 正員○津風呂 雅彦

京都大学工学部 正員 丹羽 義次

京都大学工学部 正員 廣瀬 壮一

1. はじめに

近年、境界積分方程式法の進歩は著しく、特に領域が無限遠にまで広がっている場合や空洞問題のような外部境界値問題に対して有効な手法であることから、多くの研究者が解析を行っておりその有効性が確かめられている。しかしながら、今まで境界積分方程式法によって解かれたほとんどは二次元問題であり、より現実的な三次元での弾性波動問題はあまりなされていない。

本研究は、境界積分方程式法によって、等方、均質、かつ線形な半無限弾性体中の空洞による波動散乱問題を三次元問題として解析したものである。特にモデルとして、半無限弾性体中に存在する空洞を考え、それに平面波が入射したときの定常状態における自由表面境界と空洞境界の変位挙動について数値解析を行った。

2. 積分方程式法による定式化

等方、均質な弾性体の動的挙動は、Navier-Cauchyの方程式に支配され、周波数領域において次式のように与えられる。

$$C_T^2 u_{i,jj} + (C_L^2 - C_T^2) u_{j,j i} = -\omega^2 u_i \quad \dots (1)$$

(i, j = 1, 2, 3)

ここで、 C_T, C_L は横波と縦波の速度、 ω は角周波数である。 Fig.1 空洞を有する無限領域

また、Fig.1に示されるような空洞を有する半無限領域において境界条件は次のようになる。

$\tau_{ij}(x) \equiv \sigma_{ij}(x) n_j(x) = 0 \quad x \text{ on } \partial S_1 \cup \partial S_2 \quad (\sigma_{ij}: \text{応力ベクトル}, n_j: \text{法線ベクトル})$

さらに、散乱波 u^s は放射条件を満足すると仮定する。以上の条件のもとでGreenの公式を用いれば全変位 $u = u^i + u^r$ ； u^i は入射波 u^i と反射波 u^r の和に対する境界積分方程式を得る。

$$C_{ij}^T(x) u_i(x) + \int_{\partial S_1} T_{ij}^T(x, y) u_i(y) dy + \int_{\partial S_2} T_{ij}^T(x, y) u_i(y) dy = \int_{\partial S_1} T_{ij}^T(x, y) u_i^F(y) dy + u_j^F \quad x \text{ on } \partial S_1 \quad \dots (2)$$

$$\int_{\partial S_1} T_{ij}^T(x, y) u_i(y) dy + C_{ij}^{E_2}(x) u_i(x) + \int_{\partial S_2} T_{ij}^T(x, y) u_i(y) dy = C_{ij}^{E_2}(x) u_i^F(x) + \int_{\partial S_2} T_{ij}^T(x, y) u_i^F(y) dy \quad x \text{ on } \partial S_2 \quad \dots (3)$$

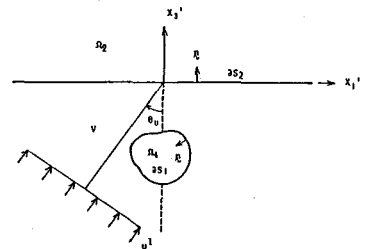
ここで、 $C_{ij}^T(x), C_{ij}^{E_2}(x)$ は二重層ポテンシャルのfree termの係数であり、 $\int_{\partial S} f_i dy$ はCauchyの主値積分である。また、三次元動弾性問題の基本解と二重層核は次のように求められている。

$$U_{ij}^j(x, y) = \frac{1}{4\pi\mu} \left\{ \frac{e^{ikr}}{r} \delta_{ij} + \frac{1}{k^2} \left\{ \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{-ikr}}{r} \right\}_{,ij} \right\} \quad \dots (4)$$

$$T_{ij}^T(x, y) = - \left\{ \lambda U_{m,m} \delta_{ik} + \mu (U_{i,k} + U_{k,i}) \right\} n_k \quad \dots (5)$$

ここで、 λ, μ はLaméの定数、 δ_{ik} はKroneckerのデルタ、 n_k は点 x での単位法線ベクトルであり、 $r = |x - y|$ である。ただし、微分はすべて点 x での微分である。

Masahiko TSUBURO, Yoshiji NIWA, Souichi HIROSE



3. 基本解と二重層核の解式

基本解と二重層核は、式(4)(5)を直接微分することによって簡単な解式を得るが、これは低周波数領域($kr \ll 1$)で桁落ちの危険が伴う。よって桁落ちの危険を回避するために、($kr \ll 1$)のときに使用する解式を導く。式(4)(5)は級数展開することにより次式のようになる。

$$\dot{U}_i^j = \dot{U}_i^{j0} + \overline{U}_i^j, \quad \dot{T}_i^j = \dot{T}_i^{j0} + \overline{T}_i^j \quad \text{---(6)}$$

ここで、 $\dot{U}_i^{j0}$, $\dot{T}_i^{j0}$ は静弾性問題の基本解と二重層核であり、次の通りである。

$$\dot{U}_i^{j0} = \{(3-4\nu)\delta_{ij} + r_{ik}r_{kj}\} / \{16\pi\mu(1-\nu)r\}$$

$$\dot{T}_i^{j0} = \{[(1-2\nu)\delta_{ij} + 3r_{ik}r_{kj}]r_{kl}n_k - (1-2\nu)(r_{ji}n_i - r_{ik}n_j)\} / \{8\pi(1-\nu)r^2\}$$

ただし、 ν はポアソン比である。また、 $\overline{U}_i^j$, $\overline{T}_i^j$ は正則な項であり、次の通りである。

$$\overline{U}_i^j = \frac{1}{4\pi\mu} (\phi\delta_{ij} - \chi r_{ik}r_{kj})$$

$$\overline{T}_i^j = \{[(\chi/r - \phi)\delta_{ij} + 2(\chi' - 2\chi/r)r_{ik}r_{kj}]r_{kl}n_k + \{\chi\mu(\chi' - \phi) + 2(\chi\mu + 1)\chi/r\}r_{ji}n_i + (\chi/r - \phi)r_{ik}n_j\} / 4\pi$$

上式における ϕ と χ は次式で与えられる。

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ikr)^n}{n!} \frac{r^{n-1}}{n+2} \left\{ n+1 + \left(\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \right)^{\frac{n+1}{2}} \right\}$$

$$\chi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ikr)^n}{n!} \frac{n-1}{n+2} r^{n-1} \left\{ 1 - \left(\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \right)^{\frac{n+1}{2}} \right\}$$

なお、 $\chi' = \partial\chi/\partial r$, $\phi' = \partial\phi/\partial r$, $r_{ik} = (\chi_i - y_i)/r$ である。

4. 特異性の評価

式(2)における特異積分は、境界 ∂S を持つ無限の外部領域において剛体変位を考えることにより、次式のようになる。

$$C_{ij}^T(x) + \int_{\partial S} \dot{T}_i^j(x,y) dS_y = - \int_{\partial S - \Delta S} \dot{T}_i^j(x,y) dS_y + \int_{\Delta S} \overline{T}_i^j(x,y) dS_y + \delta_{ij} \dots (7)$$

ここで ΔS は ΔS が要素に含まれている部分である。また、Fig.2に示すような自由表面の一部を含む仮想的な境界 ∂S_0 で囲まれた内部領域 V_0 に対して、同様に剛体変位を考えることにより、

$$C_{ij}^F(x) + \int_{\Delta S} \dot{T}_i^j(x,y) dS_y = - \int_{\partial S_0 - \Delta S} \dot{T}_i^j(x,y) dS_y + \int_{\Delta S} \overline{T}_i^j(x,y) dS_y \quad \text{---(8)}$$

となる。上式の右辺を式(3)における特異積分の値として用いることにする。

5. 数値解析結果

Fig.3に示すような有限長円柱の空洞を有する半無限地盤に y 方向に振幅を持つSV波が鉛直下方から入射したときの地表面における y 方向の変位をFig.4に示す。Fig.5は、 y 軸上の y 方向の変位を2次元解析と比較したものであるが、よく一致している

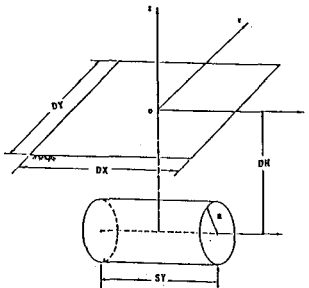


Fig.3 解析モデル

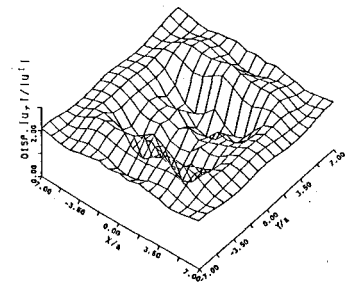


Fig.4 y方向の変位

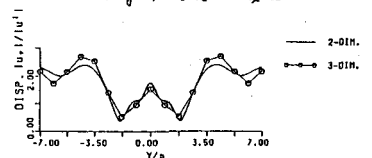


Fig.5 2次元解析との比較

のがわかる。ただし、ポアソン比 $\nu=0.25$, $ak_T=\pi/2$, $DH/a=1.5$, $SY/a=7$, $DX/a=14$, $DY/a=14$ とした。他の結果については当日詳細に発表する。