

## サブストラクチャー法による半無限弾性体中の波動散乱問題の解析

福井高専 校長 正員 丹羽義次  
 京都大学工学部 正員 廣瀬壮一  
 京都大学工学部 学生員○宗藤洋

## 1. はじめに

本研究は、不整形境界面を有する等方・均質で線形の半無限弾性体における地震動特性を、境界積分方程式法により解析するものである。特に、定式化においてはサブストラクチャー消去法を用いることにより、有限な積分範囲を有する境界積分方程式を導き、従来の境界積分方程式との比較を行った。

## 2. 解析モデルと基礎式

解析モデルは、図-1に示すような半円からなる不整形境界面 $\partial\Omega$ を有する等方・均質で線形な半無限弾性体を想定し、このモデルに面内平面波が入射した時の不整形境界面 $\partial\Omega$ 上の変位を求める。なお、ここでは平面ひずみ状態を仮定し、2次元問題として解析を行う。以上のことより、半無限弾性体Dにおける基礎式は次式となる。

$$\mu u_{i,jj}(x) + (\lambda + \mu) u_{j,ji}(x) = \rho \omega^2 u_i(x) \quad (i, j=1, 2) \quad (1)$$

ここに

$u_i(x)$ : 点  $x$  における  $i$  方向の変位ベクトル  
 $\lambda, \mu$ : Lamé の定数,  $\omega$ : 角周波数  
 である。また、地表面上で応力ベクトルが 0 なる境界条件が与えられているとする。

## 3. サブストラクチャー消去法を用いた境界積分方程式の定式化

この解析モデルに対して境界積分方程式を構成するに当たり、以下の方程式を満足する無限領域における Green 関数を与える。

$$\mu U_{i,jj}^k(x,y) + (\lambda + \mu) U_{j,ji}^k(x,y) + \rho \omega^2 U_i^k(x,y) = -\delta_{ik} \delta(x-y) \quad (2)$$

ここに

$\delta_{ik}$ : Kronecker のデルタ

$\delta(x-y)$ : Dirac のデルタ関数

である。無限領域における Green 関数

$U_i^k(x,y)$  は陽な形で求められている。

次に、半無限領域における Green 関数  $\hat{U}_i^k(x,y)$  を以下のように定義する。

$$\hat{U}_i^k(x,y) = 2 U_i^k(x,y) + \alpha_i^k(x,y) \quad (3)$$

この  $\hat{U}_i^k(x,y)$  は、図-1の境界 ( $\partial\Omega + \partial\Gamma$ )

において応力 free の境界条件を満足する。

$\alpha_i^k(x,y)$  は  $\hat{U}_i^k(x,y)$  から  $2 U_i^k(x,y)$  を差引いた正則項である。

まず、この半無限領域における Green 関数を用い散乱波による変位ベクトル  $u_i^s(x)$  について境界積分方程式を構成する。境界条件を考慮し、Gauss の発散定理を適用し、極限移項を行うと次式を得る。

$$\int_{\partial\Omega} \{ \hat{U}_i^k(x,y) t_k^s(y) - u_k^s(y) \hat{T}_i^k(y) \} dS_y = \frac{1}{2} u_i^s(x) \quad x \text{ on } \partial\Omega \quad (4)$$

ここに、 $t_i(x)$ : 点  $x$  における  $i$  方向の応力ベクトル,  $\hat{T}_i^k(x,y)$ :  $\hat{U}_i^k(x,y)$  の二重層核である。この(4)式は、積分範囲が有限となるが、Green 関数の計算が非常に複雑になるため実用性に欠けるものである。そこで、積分範囲は有限のままなおかつ Green 関数の計算が比較的簡素化できる、サブストラクチャー消去法を用いた定式化を行う。まず、図-2に示すような半無限地盤

Yoshiji NIWA Souichi HIROSE Hiroshi MUNETOU

( $D' + \Omega'$ ) を考える。基礎方程式は(1)式と同様であり境界条件は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} t_i(x) &= 0 & x \text{ on } \partial\Omega' \\ t_i(x) \text{ or } u_i(x) & \text{ given at } x \text{ on } \partial\Gamma' \end{aligned}$$

無限領域のGreen関数を用いて領域 $\Omega'$ に対する境界積分方程式を構成すると次式を得る。

$$\int_{\partial\Omega'} \{U_k^*(x, y) t_k(y) - u_k(y) T_k^*(x, y)\} dS_y = \frac{1}{2} u_i(x) \quad x \text{ on } (\partial\Omega' + \partial\Gamma') \quad (5)$$

次に、半無限領域におけるGreen関数を用いて半無限領域( $D' + \Omega'$ )について境界積分方程式を構成すると次式を得る。

$$\int_{\partial\Omega'} U_k^*(x, y) t_k(y) dS_y = u_i(x) \quad x \text{ on } \partial\Gamma' \quad (6)$$

(5)・(6)式に選点法を適用し、各種分項を離散化して整理すると次の2式を得る。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^{(1)} \\ t^{(2)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{U} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^{(2)} \end{bmatrix} \quad (8)$$

ここに、 $u$ 、 $t$ は離散化された変位及び応力ベクトルを表わし、右肩の(1)、(2)はそれぞれ図-2に示される境界 $\partial\Omega$ 、 $\partial\Gamma$ に関する量を表わす。(7)式を変位ベクトル $u$ について解くと以下の式を得る。

$$\begin{bmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T} + \frac{1}{2} \mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^{(1)} \\ t^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^{(1)} \\ t^{(2)} \end{bmatrix}$$

あるいは、

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u^{(1)} \end{bmatrix} &= [W_{11}] \begin{bmatrix} t^{(1)} \end{bmatrix} + [W_{12}] \begin{bmatrix} t^{(2)} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} u^{(2)} \end{bmatrix} &= [W_{21}] \begin{bmatrix} t^{(1)} \end{bmatrix} + [W_{22}] \begin{bmatrix} t^{(2)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9)$$

(8)・(9)式より $u^{(2)}$ 、 $t^{(2)}$ を消去すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u^{(1)} \end{bmatrix} &= [(W_{11}) - (W_{12})^{-1} (W_{22})^{-1} (W_{21})] \begin{bmatrix} t^{(1)} \end{bmatrix} \\ &= [\mathbf{S}] \begin{bmatrix} t^{(1)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (10)$$

この(10)式は、境界条件を考えると先に求めた(4)式と同等な関係にあると考えられるので、 $u^{(1)}$ 、 $t^{(1)}$ を図-1に示される境界 $\partial\Omega$ 上の $u^s$ 、 $t^s$ と見なすことができる。よって、(10)式を書き換えると次式を得る。

$$\{u^s\} = [\mathbf{S}] \{t^s\} \quad u, t^s \text{ on } \partial\Omega \quad (11)$$

(11)式に境界条件を考慮して整理すると次式を得る。

$$\{u\} = \{u\}^s \quad [\mathbf{S}] \{t^F\} \quad u, u^F, t \text{ on } \partial\Omega \quad (12)$$

ここに、 $u$ 、 $t^F$ は、入射波及び反射波による変位及び応力ベクトルを表わす。本研究においては、(12)式が解くべき境界積分方程式となる。

#### 4. 数値解析例

数値解析例として、図-3を挙げておく。図の縦軸は各Field Point におけ変位の振幅を入射波の振幅で、横軸は各Field PointのX座標を半円境界 $\partial\Omega$ の半径で無次元化したものをそれぞれ表わしている。☆—☆は(12)式によって得られた解を、—は無限領域のGreen関数だけで導かれた境界積分方程式の解をそれぞれ示している。図-3は、SV波入射・波数 $k_1 = \pi$ ・入射角 $30^\circ$ でX方向変位をそれぞれ表わしている。

なお、詳細は発表当日に報告する。

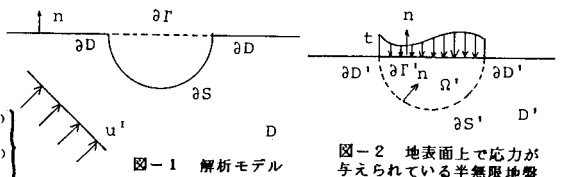


図-1 解析モデル

図-2 地表面上で応力が与えられている半無限地盤

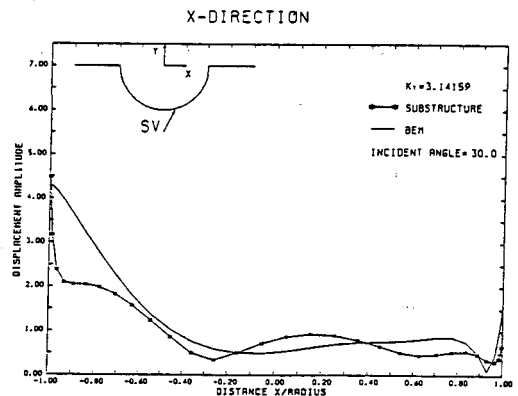


図-3 数値解析例