リー群論による住宅市場の動学化に関する二三の試み
── Noetherの定理によって ──

京都大学工学部　正　員　吉川　和広
京都大学工学部　正　員　小林　潔司
京都大学大学院　学生員　○張　衛彬

1. はじめに　近年、日本国を含めた先進諸国においては、従来のような都市圏の成長にはどめがかかり、都市圏の衰退といった新しい問題も生じるようになってきた。このような新しい状況のもとで大都市圏の地域構造や社会、経済的環境は従来とは異なった方向へ変動しつつある。また、近年人々の価値観は多様化してきており、住宅立地に関する嗜好や効用も変化しつつあることが指摘されている。しかしながら、これまでに開発されてきた住宅立地モデルや市場理論ではこのような環境の変化や人々の住宅立地に対する嗜好の変化に十分対処できないという問題がある。都市モデルを作成する場合、我々は対象とする現象の中から本質的であると考えるメカニズムを構造として抽象し、これを数学モデルとして記述することが多い。われわれが作成した都市モデルは現象を構造として理解した結果であり、したがって、構造そのものの変化をモデル化することは極めて困難であるといわざるを得ない。現在、構造変動下における都市モデルの動学化の問題を直接取上げたような研究としては、(1)起こりうる構造変動をあらかじめ想定し、これを直接モデル化する方法（A.G.Wilson）、(2)構造変動をシステムの自己組織化過程としてとらえ、その動的過程を非線形の微分方程式によって記述しようとする方法（Allen）等が提案されている。しかしながら、これらの研究は物理学の分野の理論を直接都市モデルの動学化に適用したものであり、立地主体の行動原理を内蔵しているわけでない。また、起りうるであろう構造変動をそれにさかのぼった時点でいかに実証的に検討しモデル化しうるかに関して不明な点がある。これに対して、われわれは環境や嗜好が変動している「場」の中においても、対象とする現象を安定的にモデル化しうるような方法を開発するという立場に立つことにした。本研究では、住宅立地モデルに関して若干の理論的な研究結果が得られたのでここに報告こととする

2. 基本モデル　動学的住宅市場モデルに関しては、例えばDiamond（1982）らの研究があるが、本研究では以下のような動学的モデルを提案するとともに、このモデルに基づいてリー群論の適用可能性を検討してみることとする。いま、住宅立地行動を表－1の式－1に示すような期待立地余乗最大化問題として定式化する。この問題を解くために、式－2に示すようなラグランジュを定義し、式－1の極値条件は式－3に示すようなEuler方程式により示される。式－1に示す効用関数、コスト関数が陽に時間に依存しないと考えると、式－4に示す条件が導かれる。本研究では式－4を住宅市場における保存則（Conservation Law）と呼ぶこととする。しかしながら、効用関数、コスト関数等は技術革新や立地主体の嗜好の変化により長期的には時間にともなって変化すると考えられる。そこで、こ

Kazuhiro YOSHIKAWA　Kiyoshi KOBAYASHI　Wei Bin ZHANG

のような環境条件の変化が起った場合の保存則をリー群論によるNoetherの定理を用いて導出することとする。

3. Noetherの定理による住宅市場の保存則　ここでは議論を簡単にするために、効用関数が都心までの時間距離とアクセシビリティの関数として表わされると考える。ここで人々の時間価値は社会・経済環境や人々の嗜好の変化により変化する。このような時間価値の変化を表−5に示すように記述する。Noetherの定理は無限小変換に対して不変となる保存則の条件を示したものであり、この定理を用いれば、都心までの時間距離やアクセシビリティのもつ時間価値がこのような無限小変換によって変化していった場合における保存則を導出することができる。いま、このことを簡単な例を上げて説明する。例えば、効用関数として表−6を考え、効用の構造が式−7に示すような無限小変換によって生成される経路に沿って変動していく場合、住宅市場の保存則はNoetherの定理を用いて式−8に示すように求められる。この保存則を用いれば時間価値のほかにも例えば交通システムや住宅建設等の技術革新が市場に及ぼす影響を2で述べたような方法で分析することができる。現在、効用関数、コスト関数に関して種々の関数を想定し、どのような無限小変換のもとでどのような保存則が成立しうるかといった問題に関して知見を得ている。

4. おわりに　ある特定の種類のラグランジュ関数に関しては、住宅市場における保存則を解析的な方法を用いて解くことができる。現在、住宅市場の保存則に関する体系的な整理を行うとともに、数値解析の方法やさらに無限小変換を実証的に推計する方法に関して研究を行っている。また、本稿で述べたような考え方は土地利用モデルのみならず交通モデルに関しても適用可能であり、これらに関しても研究結果が得られ次第報告したいと考える。

表−1　モデルの定式化

$$\mathrm{Max}\ Z = \int_0^T \left[U(A, S, H, N, \dot{A}, \dot{H}, \dot{N}, t) N \exp(-kt) - \dot{N} C(S, H, t) \exp(-kt) \right] dt \quad \cdots (1)$$

$$L = [U(A, S, H, N, \dot{A}, \dot{H}, \dot{N}, t) N - \dot{N} C(S, H, t)] \exp(-kt) \quad \cdots (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial A} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{A}}\right) = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial S} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{S}}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial H} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{H}}\right) = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial N} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{N}}\right) = 0 \quad \cdots (3)$$

$$-L + N\frac{\partial L}{\partial \dot{N}} + A\frac{\partial L}{\partial \dot{A}} + S\frac{\partial L}{\partial \dot{S}} + H\frac{\partial L}{\partial \dot{H}} = \mathrm{const.} \quad \cdots (4)$$

$$\bar{t} = t + \varepsilon \tau(t, V), \quad \tau(t, V) = \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon}(t, V, 0)$$

$$\bar{V} = V + \varepsilon \xi(t, V), \quad \xi(t, V) = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon}(t, V, 0) \quad \cdots$$

$$U = U(V, \dot{V}) = U(F) \quad \cdots (6)$$

$$\tau = 0, \quad \xi = \mathrm{const.} = 1 \quad \cdots (7)$$

$$\Omega = U + \frac{dU}{dF}\cdot C = -\mathrm{Hamiltonian} \quad \cdots (8)$$

ここに、Uは効用関数であり、A：立地条件（アメニティ、通勤時間等）、S：宅地面積、H：住宅特性、N：世帯数、t：時間の関数として表わされる。kは割引率であり、Cは住宅コストを示す。Lはラグランジュ関数を示している。εは無限小変換のパラメータであり、τ、ξはinfinitesimal generatorsを示す。t、Vはそれぞれ時間および都市までの通勤時間である。$f(V)$はアクセシビリティである。$F(V, \dot{V}) = f(V) - \dot{V}$は総合的な立地条件の良さを示す関数である。最後に、Ωはここで定数となり、その値は（$-$Hamiltonian）と等しくなる。

参考文献

1) Diamond, et al. The Economics of Urban Amenities, 1982.