

土構造物に対する Shakedown 解析の試み

京都大学工学部 学生会員〇手塚亮介
 京都大学工学部 正会員 小林昭一
 京都大学工学部 正会員 田村 武

1.はじめに 本研究は土構造物が繰り返し荷重をうけるときの安全性の解析を上界定理を用いて行なうものである。すなわち弾性解と改良した剛塑性有限要素法を併用することにより shakedown 解析を行なう。それによつて繰り返し荷重に対する極限荷重を推定する。

2. Shakedown 理論 構造物がある限界内の繰り返し荷重をうけるときのはじめに塑性変形がおこるとしても最終的に弾性応答のみを示すような場合にその構造物は shakedown するという。まず admissible plastic strain rate cycle という概念を考える。これは $\dot{\epsilon}_{ij}^0$ であらわされある時間周期 T において (1) の $\dot{\epsilon}_{ij}^0$ が適合条件式を満足するという特性をもつものである。ここで Koiter の定理 (3) により解析を行なう。Koiter の定理はどんなある 1 つの $\dot{\epsilon}_{ij}^0$ に対してももし (3) が成立するなら shakedown はおこらず最終的に崩壊する。ここで D は塑性ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{ij}$ を与えたときそれと normality rule をみたす応力 σ_{ij} との積 $D(\dot{\epsilon}_{ij}^0) = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^0$ $X_i T_i$ は与えられた外力。また $\dot{\epsilon}_{ij}$ は $\dot{\epsilon}_{ij}^0 + \dot{\epsilon}_{ij}^r$ と適合条件式によつて結びつくものである。ここで塑性ひずみは一般に適合条件を満足しないから適合条件を満足させるためには残留応力 (2) を考える必要がある。逆に (4) がすべての外力 $X_i T_i$ およびすべての $\dot{\epsilon}_{ij}^0$ に対して 1 より大きな長がみつけれらるなら shakedown する。その長の上限值が shakedown に関する安全率である。

$$\Delta \epsilon_{ij}^0 = \int_0^T \dot{\epsilon}_{ij}^0 dt \quad (1)$$

3. Shakedown 解析の定式化

2. から (4) をみたす最小の長を求めることを主眼とする。ここで外力仕事と内力仕事におきかえ残留応力の性質を用い、さらに塑性ひずみの方向がひずみ場において物体内で同じ方向を向くと仮定する。そして物体内の同一地点において $\{\sigma_{ij}^0\}_{max}$ が $\dot{\epsilon}_{ij}^0$ の方向に最大の値をもつ σ_{ij}^0 とすれば $\{\sigma_{ij}^0\}_{max} \dot{\epsilon}_{ij}^0 \geq \sigma_{ij}^0 \dot{\epsilon}_{ij}^0$ より (5) のようになる。

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \rho_{ij} \quad (2)$$

σ_{ij} : 実際の応力, $\sigma_{ij}^{(0)}$: 物体を弾性体と仮定した時の応力
 ρ_{ij} : 残留応力

$$\int_0^T dt \int \{X_i \dot{u}_i + \int_{sp} T_i \dot{u}_i ds\} > \int_0^T dt \int D(\dot{\epsilon}_{ij}^0) dV \quad (3)$$

$$\int_0^T dt \int \{X_i \dot{u}_i + \int_{sp} T_i \dot{u}_i ds\} \leq \int_0^T dt \int D(\dot{\epsilon}_{ij}^0) dV \quad (4)$$

$$R = \frac{\int_0^T dt \int D(\dot{\epsilon}_{ij}^0) dV}{\int \{\sigma_{ij}^0\}_{max} \Delta \epsilon_{ij}^0 dV} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \int D(\Delta \epsilon_{ij}^0) dV &\rightarrow \min \\ \text{sub. to } \int \{\sigma_{ij}^0\}_{max} \Delta \epsilon_{ij}^0 dV &= 1 \quad \epsilon_{cc} = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

以上より定式化は (6) のようになる。つぎに (6) に対する解の必要条件を求めるために Lagrange 乗数 μ を導入して最小値問題では変分が 0 という条件を用いて $B = B_{ij}$, $U = U_{ij}$ なるマトリックスを用いてベクトルで定式化しなおすと (7) のようになる。

$$\begin{aligned} \int B^T \sigma dV + L^T \lambda &= \mu \int B^T \sigma^E dV \\ \int \mu U^T B^T \sigma^E dV &= 1, \quad L \mu = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

B : 全要素の工学的ひずみベクトル, U : 全節点の変位ベクトル
 σ : 全要素の体積変化ベクトル, σ^E : 全要素の応力ベクトル
 σ^E : 全要素の弾性応力ベクトル
 μ : 全要素につき $\Delta \epsilon_{ij}^0$ と適合条件を満足する変位ベクトル

以上より shakedown 解析と剛塑性有限要素法の極限解析と異なる点は外力項について外力とフリーな

R. Tezuka, S. Kobayashi, T. Tamura

系を満足する σ_{ij} と適合条件を満足する $\Delta \varepsilon_{ij}$ との内積を最大にするような弾性応力を利用している点である。

4. 数値計算例 ここでは物体力をうけて shakedown する場合の $\{\sigma_{ij}\}_{max}$ の分布ならびに極限解析における安定係数と shakedown 解析における安定係数の比較を行なう。まず $\{\sigma_{ij}\}_{max}$ の分布を調べる。考える弾性応力空間としては fig-1 を用いる。また fig-2 の状態 1 は $V=0.0, H=P$ の応力状態。状態 2 は $V=0.0, H=-P$ の応力状態。状態 3 は $V=1.0, H=0.0$ の応力状態を示す。これは同一方向であると仮定しているから σ_{ij} との内積を最大にする弾性応力は上述の 3 つの状態のみを考慮すればよい。次に fig-3, fig-4 に示される 2 つの斜面に対して極限解析と shakedown 解析の場合の安定係数の比較をした結果が fig-5 である。考える弾性応力空間としては fig-1 を用いる。この場合極限解析の安定係数というのは与えられた応力空間におけるすべての応力状態の中での最小値すなわち最も危険である応力状態の安定係数である。

参考文献

1) Martin, J.B (1975)

: Plasticity, MIT Press

2) Koiter, W.T

: General Theorems For

Elastic-Plastic Solids,

(Progress in Solid Mechanics, CH, IV),

North-Holland, 1964

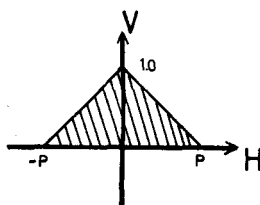


fig1

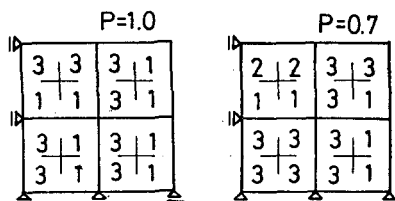


fig2

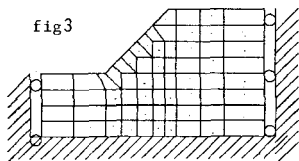
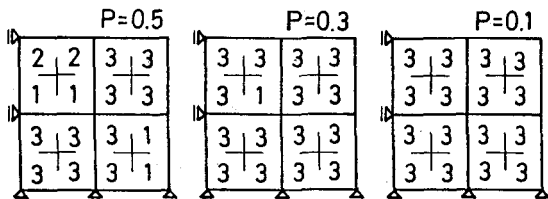
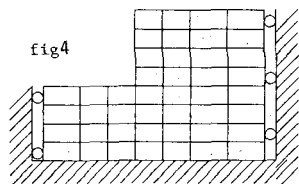


fig4



斜面の 傾斜角	荷重状態	limit $N_s = H_c \frac{\sigma}{c}$	shakedown $N_s = H_c \frac{\sigma}{c}$
$\beta = 45^\circ$	$\begin{matrix} 1.0 \\ \downarrow \\ 1.0 \end{matrix}$	2.217 (極限状態)	1.719
	$\begin{matrix} 0.5 \\ \downarrow \\ 0.5 \end{matrix}$	4.434 (極限状態)	2.557
	$\begin{matrix} 0.2 \\ \downarrow \\ 0.2 \end{matrix}$	5.419 (極限状態)	2.421
$\beta = 90^\circ$	$\begin{matrix} 1.0 \\ \downarrow \\ 1.0 \end{matrix}$	2.546 (極限状態)	1.822
	$\begin{matrix} 0.5 \\ \downarrow \\ 0.5 \end{matrix}$	4.582 (極限状態)	2.093
	$\begin{matrix} 0.2 \\ \downarrow \\ 0.2 \end{matrix}$	4.582 (極限状態)	2.387

fig5

$$r = M, \quad c = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad H_c = 8.0$$