

# 摩擦性材料に対する剛塑性有限要素法

建設省 正員 〇角 哲也 京都大学工学部 正員 小林 昭一  
 京都大学工学部 正員 田村 武 京都大学工学部 学生員 田中 照彦

1. はじめに 塑性論の上界法を基礎に構造物の極限解析を有限要素法により定式化したものが「剛塑性有限要素法」である。本来、金属の塑性加工の分野から発展した解法で、主に降伏関数が等方応力に依存しない von Mises 型を対象としてきた。ところが土質材料では、一般に内部摩擦角  $\phi$  を考慮する必要があり、ここでは Drucker-Prager 型を取り上げる。本研究では、上界法が構造物の塑性釣り合いを導くことを示しながら摩擦性材料に対する剛塑性有限要素法の定式化を行い、その数値計算例を示す。また降伏条件の内部摩擦角  $\phi$  と、塑性ポテンシャルの内部摩擦角  $\phi$  とが異なる場合、すなわち非関連流れ則 (Non-associated Flow Rule) を適用する場合についても概説する。

## 2. 上界法と塑性釣り合い式

Drucker-Prager 型の降伏関数は (1) で示され  $\alpha$ ,  $k$  は定数、応力  $\sigma_{ij}$  に対して  $I_1 = \sigma_{ii}$ ,  $J_2 = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij}$ ,  $S_{ij} = \sigma_{ij} - I_1 \delta_{ij} / 3$  である。いま降伏関数と塑性ポテンシャルが等しい Associated Flow Rule を想定すると塑性ひずみ速度  $\dot{\epsilon}_{ij}$  は  $\Lambda$  を未知定数として (2) で示される。ここで体積塑性ひずみ速度  $\bar{\epsilon}_0 = \dot{\epsilon}_{ii}$  に関する制約条件式 (3) が考慮されなければならない。ここに  $\bar{\epsilon} = \sqrt{\dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}}$ ,  $\beta = 3\alpha / \sqrt{3\alpha^2 + 1}$  である。ところで塑性論の上界定理により、任意の運動学的許容なひずみ速度場  $\dot{\epsilon}_{ij} [= \frac{1}{2} (\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i})]$  に対して (4) で定義される荷重強度  $\bar{P}$  は、真の極限荷重  $P^*$  を下まわらないことが示される (5)。ここに  $\dot{u}_i, T_i, X_i$  は、変位速度、応力境界  $S_\sigma$  上の表面力および物体力である。また  $D(\dot{\epsilon}_{ij}) = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}$  は、ひずみ速度  $\dot{\epsilon}_{ij}$  が与えられた時、それに対して Normality Rule を満足する応力  $\sigma_{ij}$  との積として定義され、エネルギー消散率と呼ばれる。これより  $P^*$  を求めるためには、外力仕事を単位とする (6) 及び、ひずみ速度に関する (3) のもとで  $\bar{P} = D(\dot{\epsilon}_{ij})$  の最小化を図ればよく問題 A が示

$$f = -\alpha I_1 + \sqrt{J_2} \quad (= k) \quad (1)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \Lambda (-\alpha \delta_{ij} + S_{ij} / \sqrt{J_2}) \quad (2)$$

$$\bar{\epsilon}_0 + \beta \bar{\epsilon} = 0 \quad (3)$$

$$\bar{P} \left\{ \int_V X_i \dot{u}_i dV + \int_{S_\sigma} T_i \dot{u}_i dS \right\} = \int_V D(\dot{\epsilon}_{ij}) dV \quad (4)$$

$$P^* \leq \bar{P} \quad (5)$$

$$(A) \quad \begin{cases} \bar{P} = \int_V D(\dot{\epsilon}_{ij}) dV \rightarrow \min \\ \text{sub. to } \int_V X_i \dot{u}_i dV + \int_{S_\sigma} T_i \dot{u}_i dS = 1 \\ \bar{\epsilon}_0 + \beta \bar{\epsilon} = 0 \end{cases}$$

$$D(\dot{\epsilon}_{ij}) = \gamma \bar{\epsilon} \quad (7)$$

$$\Phi(\dot{u}_i, \lambda, \mu) = \int_V D(\dot{\epsilon}_{ij}) dV + \int_V \lambda (\bar{\epsilon}_0 + \beta \bar{\epsilon}) dV - \mu \left( \int_V X_i \dot{u}_i dV + \int_{S_\sigma} T_i \dot{u}_i dS - 1 \right) \quad (8)$$

$$\left\{ \gamma \frac{\dot{\epsilon}_{ij}}{\bar{\epsilon}} + \lambda (\delta_{ij} + \beta \frac{\dot{\epsilon}_{ij}}{\bar{\epsilon}}) \right\}_{,j} + \mu X_i = 0 \quad \text{in } V \quad (9)$$

$$\left\{ \gamma \frac{\dot{\epsilon}_{ij}}{\bar{\epsilon}} + \lambda (\delta_{ij} + \beta \frac{\dot{\epsilon}_{ij}}{\bar{\epsilon}}) \right\} n_j = \mu T_i \quad \text{on } S_\sigma \quad (10)$$

$$\dot{\epsilon}_{33} = \dot{\epsilon}_{23} = \dot{\epsilon}_{31} = 0 \quad (11)$$

$$I_1 = \frac{3}{2} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \frac{3\alpha}{\sqrt{1-3\alpha^2}} \sqrt{\left( \frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2} \right)^2 + \sigma_{12}^2} \quad (12)$$

$$J_2 = \left\{ \left( \frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2} \right)^2 + \sigma_{12}^2 \right\} / (1-3\alpha^2) \quad (13)$$

$$f = -3\alpha \left( \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \right) + \sqrt{1-3\alpha^2} \sqrt{\left( \frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2} \right)^2 + \sigma_{12}^2} \quad (= k) \quad (14)$$

Tetsuya Sumi, Shoichi Kobayashi, Takeshi Tamura, Teruhiko Tanaka

される。また  $D(\varepsilon_i')$  は (2) より (7) で計算され  $\gamma = k/\sqrt{3d^2 + \frac{1}{2}}$  である。つぎに問題Aに対する解の必要条件を求めるために、Lagrange 乗数  $\lambda, \mu$  を導入して (8) の範囲数  $\alpha$  の変分問題を考えると  $\alpha$  の停留条件から釣合い式 (9)、応力境界条件 (10) が導かれる。

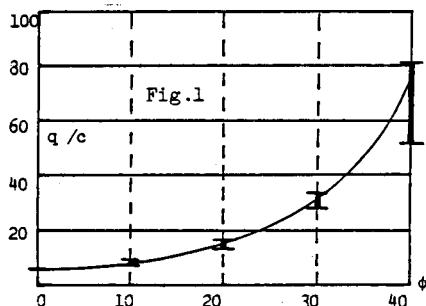
$$C \cos \phi + \left( \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \right) \sin \phi = \sqrt{\left( \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \right)^2 + \sigma_{12}^2} \quad (15)$$

$$\cos \phi = \frac{\sqrt{1-12d^2}}{1-3d^2}, \quad C = \frac{k}{\sqrt{1-12d^2}} \quad (16)$$

$$q = C \cos \phi \left[ e^{\frac{\tau \tan \phi}{\sigma}} \tan^2 \left( \frac{1}{4} \pi + \frac{1}{2} \phi \right) - 1 \right] \quad (17)$$

ここで、平面ひずみ問題に限れば、条件式 (11) より導かれる (12), (13) を、それぞれ (1) に代入すると (14)、Mohr-Coulomb の破壊規準 (15) との対応が (16) の関係式として示される。ここで  $\phi, c$  は、それぞれ内部摩擦角、粘着力である。以上を離散化し、有限要素法として定式化して解くことになるが、釣合い式が (1),  $\lambda$  に関して非線形となるため Newton-Raphson 法による逐次代入計算を行なう。

**3. 数値計算例** ここでは浅い基礎の支持力問題を取り上げ、いま基礎底面は完全に滑らかとする。よく知られた Prandtl のすべり線に対して極限荷重  $q$  は (17) で与えられ、一方、計算結果は Fig. 1 のように得られた。また、Non-associated Flow Rule の場合も同時に示されており、これは塑性ポテンシャルの内部摩擦角  $\phi$  に対して Associated Flow Rule を適用しながら、応力状態に応じて (1) の定数  $k$  を変化させることにより得られる。各  $\phi$  に対する計算結果の上端は  $\phi = \phi$  に、下端は  $\phi = 0$  に相当している。Fig. 2-3 (a), (b) は、それぞれ、崩壊時の速度場、主応力である。



#### 参考文献

- 1) T. Tamura, S. Kobayashi & T. Sumi : Limit Analysis of Soil Structure by Rigid Plastic Finite Element Method, Soils & Foundation, Vol. 24, No. 24, 1984.
- 2) W. F. Chen : Limit Analysis and Soil Plasticity, Elsevier, 1975.

