

Burgers 方程式による氾濫水先端部の挙動

京都大学防災研究所 正員 土屋 義人
 京都大学防災研究所 正員 山下 隆男
 京都大学大学院 学生員 ○今塩屋 宏之

1. 緒言 氾濫災害と直結するような氾濫水の先端部は、bore frontが形成されるような場合であると考えられる。本研究では、Bore-frontを有する洪水や氾濫水の先端部の場の方程式として、非線形性と散逸性とが釣り合ったBurgers 方程式を誘導し、undular boreの発生及びbore frontの衝突特性を検討する。まず、特異点解析及び数値計算によって、undular-boreに対応する振動解の出る条件を検討する。次に、Burgers 方程式の解析解を初期境界条件とした場合のfront の衝突の数値シミュレーションを行ない、氾濫数値計算に必須のfront の解の挙動を一次元場で検討する。

2. Burgers 方程式の誘導 河床勾配 $S = \tan \theta$ の開水路流れの基礎式は、平均流速 u と水深 h とによって次式で表わされる。

$$h_t + uh_x + hu_x = 0, \dots\dots (1), \quad u_t + uu_x + g' h_x = g' S - C_f \frac{u^2}{h} + \nu_e u_{xx}, \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 C_f は Chezy 係数、 $g' = g \cos \theta$ 及び ν_e は渦動粘性係数である。

上式について Burgers 方程式の相似則を満たす G-M 変換、 $\xi = \varepsilon (x - \lambda t)$, $\tau = \varepsilon^2 t$, を行ない、未知変数 (u, h) を微小パラメータ ε で展開すると、

$$O(\varepsilon^2); (\lambda_0 - A_0) U_\xi^{(1)} = 0, (3), O(\varepsilon^3); (-\lambda_0 I + A_0) U_\xi^{(2)} + U_\xi^{(1)} + (U^{(1)} \cdot \nabla_u A_0) U_\xi^{(1)} + K_0 U_\xi^{(1)} = 0, (4)$$

ここに、 $A_0 = \begin{bmatrix} u_0 & h_0 \\ g & u_0 \end{bmatrix}$, $U^{(1)} = (h^{(1)}, u^{(1)})$, $U^{(2)} = (h^{(2)}, u^{(2)})$, $\nabla_u = (\frac{\partial}{\partial h}, \frac{\partial}{\partial u})$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

行列 A の左及び右固有ベクトルを L, R とすると、スカラー関数 $\phi(\xi, \tau)$ を用いて、 $U = \phi(\xi, \tau) R$ と表わされ、 $U_\xi^{(1)}$ についての代数方程式 (4) が解を持つための条件は

$$L \cdot \{ U_\tau^{(1)} + (U^{(1)} \cdot \nabla_u A_0) U_\xi^{(1)} + K_0 U_\xi^{(1)} \} = 0.$$

これを、 ϕ の式に書き直すと、次の Burgers 方程式が導かれる。

$$\phi_\tau + 2 \frac{\lambda_0 - u_0}{h_0} r^* \phi \phi_\xi + \frac{\lambda_0 - u_0}{g} \{ \phi_\tau + 2 (\frac{\lambda_0 - u_0}{h_0})^2 r^* \phi \phi_\xi - \frac{\nu_e (\lambda_0 - u_0)}{h_0} \phi_{\xi\xi} \} = 0,$$

$$h_\xi^{(1)} = r^* \phi_\xi, \quad u_\xi^{(1)} = \frac{\lambda_0 - u_0}{h_0} r^* \phi_\xi.$$

これを水位変動 h で表示し、移動座標系 (ξ, τ) から再び固定座標系 (x, t) に戻した方程式に、K-dV 方程式の分散項を導入して、これと非線形性及び散逸性とが釣り合う方程式 (K-dV-Burgers) として、次式を考えることとする。

$$h_t + (c_0 + u_0) h_x + \frac{3c_0}{2h_0} h h_x + \frac{1}{6} c_0 h^3 h_{xxx} = \frac{\nu_e}{2} h_{xx}, \dots\dots\dots (5)$$

3. Undular boreの発生条件 さて、式 (5) は若干の操作の後、変数 (ξ, h) に対して $(\zeta, \eta) = (\alpha \xi, \beta h)$ を定義し、 $d\eta/d\zeta = g = \omega$, $d\omega/d\zeta = f$ を満たすように、 g, f を決めると、次式のような 2 階の常微分方程式に変形される。

$$\eta \zeta \zeta - \omega \eta \zeta + \eta^2 - \eta = 0 \quad (6) \quad \text{ここに、} \alpha = \frac{1}{h_0} \sqrt{6 \{ (U - u_0)/c_0 \} - 1}, \quad \beta = \frac{g}{2h_0 \alpha^2}.$$

Yoshito TSUCHIYA, Tako YAMASHITA, Hiroyuki IMASHIOYA

式 (6) から、 $(\eta, \omega) = (0, 0), (1, 0)$ の 2 つの特異点があることがわかり、前者はポテンシャルが極大となる鞍形点で、後者は μ の値に依存して、渦状点・結節点となる。特に、 $\mu = 0$ ($\eta_e = 0$) の場合には渦心点、すなわちポテンシャルが極小で安定な平衡点となり、孤立波やクノイド波のそれに対応する。また、 η_e が大きい場合には undular-bore は発生せず、その限界は渦状点と結節点との分岐条件として、

$$\frac{3\nu}{c_0 h_0} = 2\sqrt{6 \{U - (c_0 - u_e)/c_0\}} \quad (7)$$

を得る。ここで、 η_e を bore 背後の (u, h) の関数と仮定し、水理実験により、 η_e を推定することは可能である。また、式 (5) を数値計算することによっても発生する undular-bore の特性を調べることができ、分散項にファクター $(0.0, 0.1, 1.0)$ をかけて、分散項に Crank-Nicholson 法、非線形項に修正 Euler 法を適応した陰解法によって、数値計算を行った結果を図-1 に示す。計算条件は $H/h=0.28$ であり、undular-bore の生ずる領域である。図から明らかなように、何れの場合にも振動解がみられるが、分散項の強さに応じて、振動の振幅、周期が異なることから、水理実験等の併用によって、そのオーダーを決定することが可能であろう。

4. Bore-front の衝突数値シミュレーション Burgers 方程式のキンク解を初期境界条件として与え、式 (1), (2) を直接数値計算することで、互いに逆の方向に伝播する、振幅の異なる Burgers soliton の衝突のシミュレーションが行なえる。図-2 は完全陰解法によって得られた結果の一例であり、Burgers soliton の特性として知られているような衝突時の解の吸収性がシミュレートされることが確認される。

5. 結 語 以上、段波として伝播する洪水や氾濫水の先端部の場の方程式として、

Burgers 方程式を誘導し、振動解の発生及び front の衝突を検討した。その結果、分散性のオーダー及び渦動粘性係数の推定を行なうため、水理実験を援用して、これらを決定していくことで、これまで便宜的な取り扱いをしていた、氾濫水先端部の挙動を明確にすることが可能となろう。

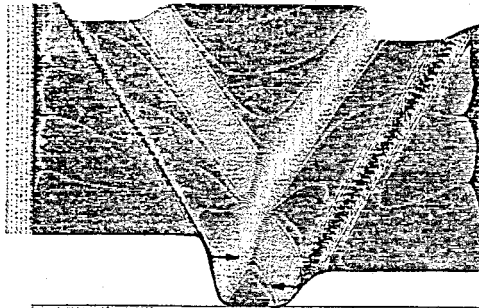


図-2 Burgers soliton の衝突

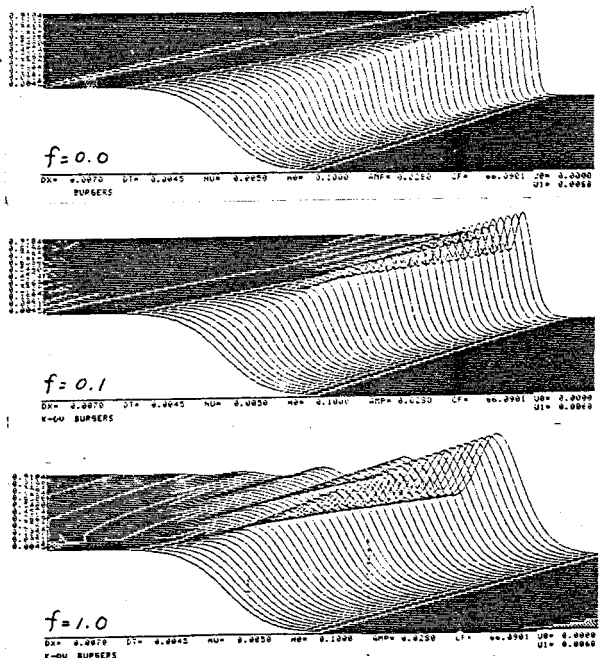


図-1 undular-bore の発生