

せん断乱流場における Lagrange 相関

京都大学工学部 正員 岩佐 義朗

京都大学工学部 正員 〇 綾 史郎

1. はじめに

せん断乱流場における Lagrange 相関関数には、いくつかの定義が考えられる。本研究では、Taylor の乱流拡散理論のせん断乱流場への応用(移流分散現象への応用)の見地より、境界面で拘束された、流下方向に一様な三次元的せん断乱流場における流れ方向の Lagrange 速度 v_x の相関関数について、そのいくつかの定義を示し、それらの相互関係および特性について考察した。

2. Lagrange の速度と乱れ

流れ場として、 y, z 軸方向に有限であり、 x 軸(主流)方向には十分長い場を考え、速度場は、 y, z 軸方向には非一様であるが、 x 軸方向には一様な定常乱流場を考える。

時刻 $t=t_0$ に、点 $a(x, y, z)$ を出発した粒子の時間 s 後の時刻 $t=t_0+s$ における Lagrange の速度を、 $w(s; a, t_0)$ と記すと

$$w(s; a, t_0) = U(X(s; a, t_0), t_0+s) \quad (1)$$

$$X(s; a, t_0) = \int_0^s w(s'; a, t_0) ds' + a \quad (2)$$

である。ここに、 X ; 粒子位置、 U ; Euler 流速である。

x 軸方向の Lagrange 的速度 $v_x(s; a, t_0)$ に対して、次の3種の平均を考える。

$$[v_x] \equiv 1/V_a \int v_x(s; a, t_0) da_x da_y da_z \quad (3.1)$$

$$= 1/A \int da_y da_z (1/L \int v_x(s; a, t_0) da_x) \quad (3.2)$$

$$\langle v_x \rangle \equiv 1/L \int v_x(s; a, t_0) da_x \quad (4.1)$$

$$= 1/t_0 \int v_x(s; a, t_0) dt_0 \quad (4.2)$$

$$\bar{v}_x \equiv 1/s \int v_x(s; a, t_0) ds \quad (5)$$

以上の3種の平均値について、以下のことが明らかである。

(a) (3) は、粒子の出発点 a に関する体積平均を示しており、Lagrange 積分と Euler 積分の関係より、十分大きい V_a (L) について一定であり、断面平均流速 U に等しい。

$$[v_x] = U = 1/A \int \bar{u}_x(y, z) dy dz \quad (6)$$

ここに、 $\bar{u}_x$ は局所平均流速である。

(b) (4) は、点 (y, z) を出発する多数の粒子についての平均であり、 $s=0$ のとき、

$$\langle v_x \rangle(0, a) = \bar{u}_x(y, z) \quad (7)$$

(c) (5) は、点 a を出発した1個の粒子の Lagrange 的速度の時系列に関する時間平均であり、平均化時間 T_s (トウベルタイ 4 s) に依存する。

(d) (4), (5) の平均は、トウベルタイ 4 s の関数であるが、断面内の部分領域 ΔA_z に粒子が存在する確率 $P_z = \Delta s_z / s$ (Δs_z ; s 時間内に領域 ΔA_z に粒子が存在する時間)

Yoshiaki IWASA, Shirou AYA

は、十分大きい s に対して、出発点 a 、および ΔA_2 の位置に依存せず等しくなる (Fig. 1 参照) ので、面積平均に置きかえらる。

$$\langle v_x \rangle, \overline{v_x} \rightarrow U \quad (s \rightarrow \infty) \quad (8)$$

以上のことから、Lagrange の乱れ v_x は、次のように定義される。

$$v_x'(s; a, t_0) \equiv v_x(s; a, t_0) - U \quad (9)$$

粒子は、拘束された断面内を動きまわり、 $s \rightarrow \infty$ でその存在確率は一定であるから、 v_x は定常確率過程である ($\overline{u_x}$ が一定の一樣乱流場では、明らかに3つの定義は一致する)。

3. Lagrange の自己相関関数

関数 $b(s_1, \sigma; a, t_0) \equiv v_x(s_1; a, t_0) v_x(s_1 - \sigma; a, t_0)$ を考えると、 b は一般に出発点 a 、トラベルタイム s 、ラグタイム σ の関数である。 b について、2. と同様な3つの平均を考え、次の3種のLagrange相関関数を得る。

$$[B_L] \equiv \frac{1}{\Delta a} \int b(s_1, \sigma; a, t_0) da_x da_y da_z \quad (11)$$

$$\langle B_L \rangle \equiv \frac{1}{L} \int b(s_1, \sigma; a, t_0) da_x \quad (12)$$

$$\overline{B_L} \equiv \frac{1}{s} \int b(s_1, \sigma; a, t_0) ds_1 \quad (13)$$

(11) ~ (13) によって定義される相関関数について

2. 以下のことが明らかである。

(a) (11) は、 $v_x(s_1; a, t_0) = v_x(\sigma; a', t_0 + s_1 - \sigma)$ 、

$v_x(s_1 - \sigma; a, t_0) = v_x(0; a', t_0 + s_1 - \sigma)$ 、 $a' = X(s_1 - \sigma; a, t_0)$

を用いると、 σ のみの関数となる。

$$[B_L] = [B_L](\sigma) \quad (14)$$

(b) 通常のLagrange相関は、(12) より、

$$\langle B_L \rangle(s_1, s_2; a_y, a_z) \quad (15)$$

であり、出発点 (a_y, a_z) の関数である。

(c) 2. (d), 3. (b) の関係を考慮すると

$$\langle B_L \rangle, \overline{B_L} \rightarrow [B_L] \quad (s_1 \rightarrow \infty) \quad (16)$$

4. 計算例

2次元、3次元のせん断乱流場を対象として、数値シミュレーション²⁾により得られた粒子の拡散の状況をFig. 1, Fig. 2 (a), (b) に示した。これらの図より、(8), (16) の収束性は遅いことが推定される。また、3次元の場合は、2次元に比べて一層遅くなる。

Fig. 3 は、(11), (12) で定義されるLagrange相関関数を、2次元せん断乱流場において求めたものである。さか大きくなるに従い、 $\langle B_L \rangle$ (---, — 線) が出発点位置に依存せず、 $[B_L]$ (— 線) に漸近していくことがわかる。なお、(15) の関係は、図中で $s = \sigma$ 上における $\langle B_L \rangle$ を結んだもので表示される。

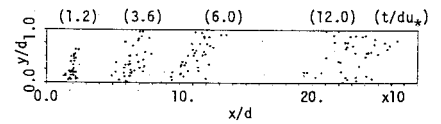


Fig. 1 2次元せん断乱流場の分散 ($a_y = 0.05$)

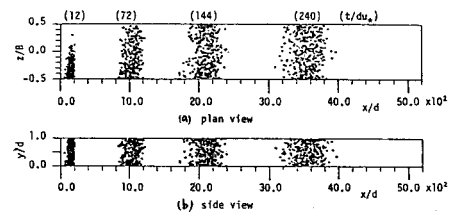


Fig. 2 3次元せん断乱流場の分散 ($a_y = 0.05, a_z = 0.05$)

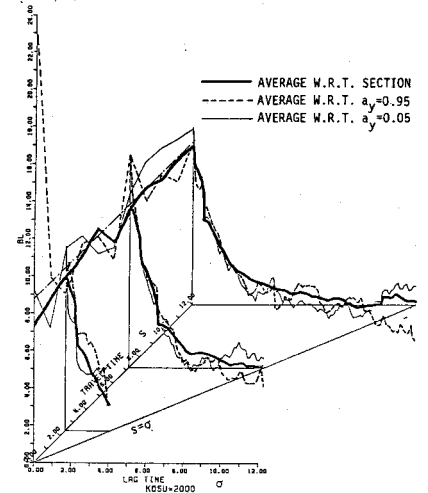


Fig. 3 2次元せん断乱流場のLagrange相関

参考文献: 1) Tenkes, H. and Lumley, J.L. (1978): A First Course in Turbulence. 2) 岩佐 敏・森田 西 (1982): 京都大学防災研年報