

鉛直加速度を考慮した定常な一次元流れに関する一考察

京都大学工学部 正 員 岩佐 義朗 広島大学工学部 正 員 細田 尚

1. はじめに; 本研究は、鉛直加速度を考慮した定常な開水路流れの基礎式を用いて、波状跳水の特性を検討する。波状跳水の研究には、弧立波とクノイド波を接続して理想的な波状跳水を考えた Iwasa の研究⁽¹⁾、鉛直加速度、渦動粘性項を考慮した基礎式により定性的な特性を検討した Whitham の研究⁽²⁾がある。本研究ではこれらのモデルの特性を詳細に検討するとともに、実際現象への適用の可能性について考察する。

2. 基礎式; 基礎式は、鉛直加速度を考慮した一次元運動量方程式⁽³⁾を用いる。ただし、Whitham のモデルに対応して、渦動粘性項を含んでいる。座標系と波状跳水の概念図を Fig. 1 に示す。

$$\frac{d}{dx} \left(hu^2 + \frac{gh^2}{2} + \frac{1}{3} h^2 u \frac{d^2 h}{dx^2} - \frac{1}{3} hu^2 \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 \right) = \frac{d}{dx} \left(D_m h \frac{du}{dx} \right) + hg \sin \theta - \frac{\tau_b}{\rho} \quad (1)$$

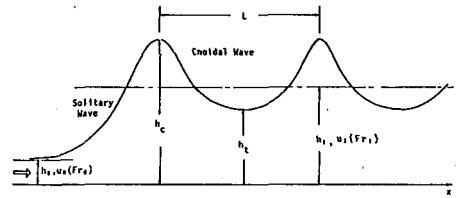


Fig. 1 概念図

(1) 式の右辺が無視されるとき、クノイド波とよばれる周期解と、その極限としての弧立波が存在する。Whitham は、波状跳水、段波のような局所的に変化が激しい部分では $hg \sin \theta - \frac{\tau_b}{\rho}$ の項を他の項に比べて小さいとした次式と同様の基礎式を考えた。 q は単位幅流量。

$$\frac{q^2}{h} + \frac{gh^2}{2} + \frac{1}{3} q^2 \frac{d^2 h}{dx^2} - \frac{1}{3} \frac{q^2}{h} \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 - D_m h \frac{d}{dx} \left(\frac{q}{h} \right) = M_0 (= \text{const.}) \quad (2)$$

3. Iwasa のモデル⁽¹⁾; Iwasa は波状跳水を弧立波とクノイド波の接続として表わした。接続条件として h_0 と h_1 が共役水深の関係にあること、すなわち、次式が仮定されている。

$$\frac{h_1}{h_0} = \frac{\sqrt{1+8Fr_0^2} - 1}{2} \quad (3) \quad \text{このモデルの特性量は次のように表わされる。記号の説明は Fig. 1 に示した。}$$

$$\frac{h_c}{h_0} = Fr_0^2, \quad \frac{h_t}{h_0} = 2 \frac{F_1(\pi/2, k) - E_1(\pi/2, k)}{F_1(\pi/2, k) \{ \sqrt{1+8Fr_0^2} - 1 \} - 2Fr_0^2 E_1(\pi/2, k)}, \quad \frac{L}{h_0} = \frac{4F_1(\pi/2, k)}{\sqrt{3(1 - \frac{h_0}{Fr_0^2 h_t})}} \quad (4)$$

ここに、 $k^2 = (Fr_0^2 - h_t/h_0)/(Fr_0^2 - h_0/h_t)$, F_1 , E_1 ; 第一積、第二種の完全楕円積分。

4. Whitham のモデル⁽²⁾; Whitham は (2) 式と同様の基礎式の特性を検討した。(2) 式は連立常微分方程式系で $\frac{dh}{dx} = p$, $\frac{q^2}{3} \frac{dp}{dx} = \frac{1}{3} \frac{q^2}{h} p^2 + \frac{D_m q}{h} p + \left(M_0 - \frac{q^2}{h} - \frac{gh^2}{2} \right)$ (5)

と表わせる。この基礎式系の特異点は、 $p=0$, $\frac{q^2}{h} + \frac{gh^2}{2} = M_0$ であり、共役水深の関係にあり、Iwasa のモデルの接続条件が自動的に組みこまれていることになる。また、この特異点は、 $D_m/q = \sqrt{\frac{4}{3} \left(\frac{1}{Fr_0^2} - 1 \right)}$, $Fr_1 = q/\sqrt{gh^3}$ により安定結節点と安定渦状点に分類されることが指摘され、安定渦状点の領域が波状跳水に対応している。安定結節点の領域は D_m/q の値が非常

に大きいことから、水理学的に意味のない領域と考えられている。解の特性を $Fr = 0.7, Dm/q = 0.05$ のばあいについて Fig. 2 に示した。ただし、 P の初期値として ± 0.001 の 2 通りを示したが、跳水の発生位置が異なるだけで、その他の特性量は同一となっている。Fig. 2 には参考のため、(2) 式で静水圧分布の仮定を行ったばあいの基礎式

$$\frac{dh}{dx} = -\frac{1}{Dm/q} \left(q^2 + \frac{gh^3}{2} - Moh \right) \quad (6)$$

の結果も示した。共役水深の間で急激な水深変化がみられる。

5. 両モデルの特性量の比較； Fig. 3 (a), (b), (c) に両モデルの特性量 hc/h_0 , h_c/h_0 , L/h_0 と Fr_0 の関係を示した。両者はほぼ同一の値となり、とくに波長におよぼす Dm/q の影響は小さいと考えられる。

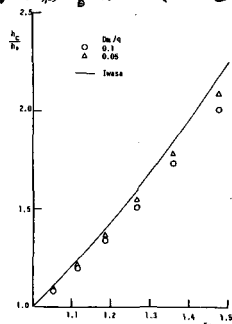
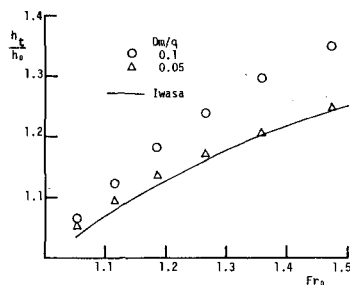
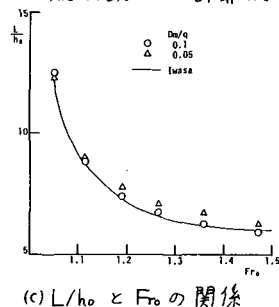
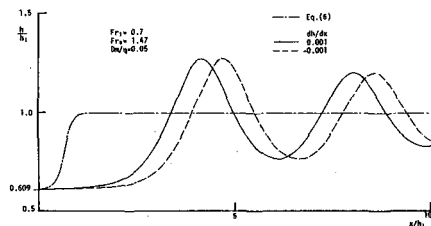


Fig. 3(a) hc/h_0 と Fr_0 の関係



(b) hc/h_0 と Fr_0 の関係

Fig. 2 波状跳水の計算例



(c) L/h_0 と Fr_0 の関係

6. 水面形解析との関係； 次に波状跳水の実験結果との比較を行う。(1) 式において、鉛直加速度を考慮することにより生ずる付加項、渦動粘性項は高階微分であることから、水理量の局所的変化が大きくなったとき卓越すると考えられ、水深変化が小さい領域では、従来の水面形解析と接続していなければならない。水面形全体を考えると、波状跳水部のみならず、せき上げ背水、低下背水の領域も含んだ解析が行われなければならない。3 節～5 節で述べたことは、上流・下流無限大の水深が明確に定義できる波状段波の結果によって検討できるが、これは講演時に述べるとして、本節では(1) 式を用いた水面形解析を行い実験値と比較する。実験条件は、路床こう配 $1/400$ 、等流の領域で $h_1 = 1.92 \text{ cm}$, $u_1 = 30.15 \text{ cm/s}$ である。得られた水面形を Fig. 4 に示す。(1) 式を連立常微分方程式系に変換して数値解析を行った。ただし、 $\tau_b = \rho \tau u^2$ とし、 τ を等流状態の水理量より 0.00518 、また $Dm/q = 0.05$ とした。数値解析の初期条件として、水深のみならず、水深の一階、二階微分まで与えねばならないが、ここでは $d^2h/dx^2 = 0$ とし、 dh/dx をパラメータとして変化させた。初期条件として $h = 1.17 \text{ cm}$ で $dh/dx =$

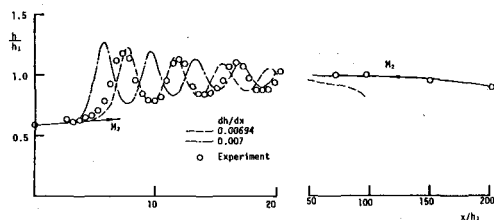


Fig. 4 水面形解析

0.00694 とした場合、波状跳水部はかなり再現できているが、低下背水が早く出現している。 $dh/dx = 0.007$ としたときはその逆となっている。参考のため、水面形方程式より求めた M_2 , M_3 曲線も示してある。【参考文献】 (1) Iwasa, Y.; Proc. 5th Japan National Congr. App. Mech., 1955 (2) Whitham, G. B.; Linear and Nonlinear Waves, 1974, (3) Iwasa, Y.; Mem. Fac. Eng. Kyoto Univ., Vol. 17, No. 4, 1955