

$\overline{C^2}-\epsilon_c$ 方程式の特性について

京都大学工学部 正 員 岩佐 美朗 広島大学工学部 正 員 細田 尚
建設省 正 員 松井 健一 ○京都大学大学院 学生員 伊藤 邦展

1. はじめに：本研究は、濃度変動場の解析を $\overline{C^2}-\epsilon_c$ 方程式を用いて行ない、開水路流れの乱流拡散実験よりその妥当性を検討したものである。
2. 一様乱流場での $\overline{C^2}-\epsilon_c$ 方程式の特性：一様等方性乱流場では、Kármán-Howarth方程式と同様に濃度の空間相関が次式によって規定される。

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{C^2} R_{cc}(r, t) - 2 \overline{C^2} \sqrt{u^2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r^2 k_c(r, t)] = 2K \overline{C^2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \left(\frac{\partial R_{cc}(r, t)}{\partial r} \right) \right] \quad (1)$$

ここに、 $R_{cc}(r, t)$ ：濃度の空間相関係数、 k_c ：濃度と流速の三重相関係数、 $\overline{C^2}$ ：濃度の変動強さ、 $\sqrt{u^2}$ ：乱れ強さ、 K ：分子拡散係数、 t ：時間、 r ：相関をとる2点間の距離。

いま、 r として空間座標 (x_1, x_2, x_3) のうちの x_1 をとると、濃度変動の一次元変数スペクトル $E_c(k_1, t)$ は、乱れ速度と同様に次式で表わされる慣性領域が存在する⁽¹⁾。

$$E_c(k_1, t) = \frac{3}{5} A_c \epsilon_c(t) \epsilon(t)^{-\frac{5}{3}} k_1^{-\frac{5}{3}} \quad (A_c \text{は定数}) \quad (2)$$

これは長さのスケールを $L = \sqrt{(\frac{\overline{C^2}}{\epsilon_c})^3 \epsilon}$ としたとき、 $R_{cc}(r, t)$ が r/L で普遍関数表示されることを示している。(1)式の右辺を無視し、 $\int_0^\infty dr$ の積分を行う。無次元変数 $r' = r/L$ を用いると、 r' に関する積分は定数と考えられるから、一つにまとめる。

$$\frac{d}{dt} (\overline{C^2} L) = C_c \overline{C^2} \sqrt{k} \quad (3)$$

となる。Lに $\sqrt{(\frac{\overline{C^2}}{\epsilon_c})^3 \epsilon}$ を代入し、次式を得る。

$$\frac{d\epsilon_c}{dt} = -\frac{5}{3} \frac{\epsilon_c^2}{\overline{C^2}} - \frac{1}{3} C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon_c}{k} - \frac{2}{3} C_c \frac{\epsilon_c^{\frac{5}{2}} k^{\frac{1}{2}}}{\overline{C^2}^{\frac{3}{2}} \epsilon^{\frac{1}{2}}} \quad (4)$$

ここで、定義式(5)式と $k-\epsilon$ モデルの(6)(7)式を用いている。

$$\frac{d\overline{C^2}}{dt} = -\epsilon_c \quad (5) \quad \frac{dk}{dt} = -\epsilon \quad (6) \quad \frac{d\epsilon}{dt} = -C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k} \quad (7)$$

上記4式が一様乱流場での基礎式である。(5)式、(7)式はある程度以上時間が経過すると、べき乗解に従い、不変量 $\Lambda = k \int_0^\infty r^\sigma f(r) dr$ (f ：二重速度縦相関)を用いる⁽²⁾と、(5)式は、

$$\frac{d^2 \overline{C^2}}{dt^2} = -\frac{5}{3} \frac{1}{\overline{C^2}} \left(\frac{d\overline{C^2}}{dt} \right)^2 + \frac{C_{\epsilon 2}}{3} \frac{2\sigma+2}{\sigma+3} \frac{1}{t} \frac{d\overline{C^2}}{dt} - \frac{2}{3} C_c \frac{1}{\overline{C^2}^{\frac{3}{2}}} \left(-\frac{d\overline{C^2}}{dt} \right)^{\frac{\sigma}{2}} \sqrt{\frac{\sigma+3}{2\sigma+2}} \sqrt{\epsilon} = 0 \quad (8)$$

となる。上式は、濃度の空間相関係数 $\overline{C^2} R_{cc}(r, t)$ の積分量が不変の仮定

$$\int_0^\infty \overline{C^2} R_{cc}(r, t) r^\sigma dr = \overline{C^2} L^{\sigma+1} \int_0^\infty R_{cc}(r') r'^\sigma dr' = \text{const} \quad (9)$$

と連立することにより、 $\overline{C^2}-\epsilon_c$ 方程式の定数 C_c を表-1に示したように表わせる。 $\sigma = \sigma$ とすれば、 $C_c = -\sqrt{r'^2/(r'+1)^2}$ となり、 C_c は-1と0の間にある。表-1には参考のために $L = \sqrt{k} \frac{\overline{C^2}}{\epsilon_c}$

表-1 ϵ_c 方程式の散逸項の表示

L	$\sqrt{\left(\frac{\overline{C^2}}{\epsilon_c}\right)^3 \epsilon}$	$\sqrt{k} \frac{\overline{C^2}}{\epsilon_c}$
$\frac{d\epsilon_c}{dt}$	$-\frac{5}{3} \frac{\epsilon_c^2}{\overline{C^2}} - \frac{1}{3} C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon_c}{k} - \frac{2}{3} C_c \frac{\epsilon_c^{\frac{5}{2}} k^{\frac{1}{2}}}{\overline{C^2}^{\frac{3}{2}} \epsilon^{\frac{1}{2}}}$	$-(2+C_c) \frac{\epsilon_c^2}{\overline{C^2}} - \frac{1}{2} \frac{\epsilon_c}{k} \epsilon_c$
C_c	$-\sqrt{\frac{r'^2(\sigma+1)}{(\sigma+1)^2}}$	$\frac{-r'}{r'+1}$

としたときの結果も示した。 $L = \sqrt{k \frac{C_c}{\epsilon_c}}$ の結果は、Newman, Launder, Lumely⁽³⁾の結果と一致している。

3. 実験の概要；一様長方形断面水路において、水路上流部の水深の位置に連続点源を設け、比重を1.0に調整した食塩水を投入し下流での濃度分布と導電率計により測定した。記録はデータレコーダーを用い、後にAD変換により変動強度、スペクトルを求めた。実験の水理諸量を表-2に示す。水路の座標系は、流下方向にx、水路幅方向にzとした。

表-2 実験の水理諸量

Exp. 1	Width B (cm)	Depth h (cm)	Mean Velocity u (cm/s)	Shear Velocity u _* (cm/s)	Aspect Ratio B/h	Slope 1/500	Froude Number	Reynolds Number
Exp. 1	25.0	2.09	31.06	1.17	11.96	1/500	0.69	6130

4. 実験結果と解析結果の比較；水深方向に濃度分布が一様となる領域を平面流れとみなし、濃度の総量から連続源の放出量を逆算して与えることにより、平面流れの解析結果と実験結果を比較した。なお ϵ_c 方程式の散逸項は前述の結果を用い、生成項は $C_{cc}(\epsilon_k/D_z)(\partial^2/\partial z^2)$ とした。解析にあたり次の無次元量を導入した。

$$x' = \frac{xU}{D_z}, \quad z' = \frac{zU}{D_z}, \quad C' = \frac{C}{C_0}, \quad C'' = \frac{C''}{C_0}, \quad \epsilon'_c = \frac{\epsilon_c}{\epsilon_0}$$

上記の無次元量を用いて基礎式を無次元化した。

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \quad (10) \quad (\text{以後無次元量の}'をとる)$$

$$\frac{\partial C''}{\partial x} = \alpha \left(\frac{\partial^2 C''}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{C_0} \frac{\partial C''}{\partial z} \right) - \beta \epsilon_c \quad (11)$$

$$\frac{\partial \epsilon_c}{\partial x} = C_{cc} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 C''}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{C_0} \frac{\partial \epsilon_c}{\partial z} \right) - \frac{5}{3} \beta \frac{\epsilon_c^2}{C_0} - \frac{2}{3} C_{cc} \frac{\beta^2}{C_0} C''^2 \epsilon_c^{\frac{1}{2}} \quad (12)$$

ここに、 α, β, γ は、 $\alpha = C_0^2/C_0^2$, $\beta = D_z \epsilon_c / U^2 C_0$, $\gamma = D_z \epsilon_c / U^2 k$ で定義される無次元パラメータである。定数 C_{cc} は1.92, C_c は-0.5とし、 α, β, γ はそれぞれ $10^{-1}, 10^{-3}, 10^{-3}$ とした。 C_{cc} は未知なので変化させた。得られた濃度分布図を図-1に示す。連続源の放出量の考え方が妥当であったことがわかる。濃度変動分布図を図-2に示す。定性的にも定量的にもよい一致を示している。濃度変動のx方向の減衰を図-3に示す。実験結果はほぼ-2乗のペースで減衰するのに対し、解析結果はもう少し大きいペースで減衰している。断面中央の点の流下に伴うスペクトルの変化を、FFT法で求め、図-4に示した。スペクトルの大きさは流下に伴って減少し、いずれのスペクトルも $-5/3$ 乗則に従っている。

参考文献 1) Hinze, J.O.; Turbulence, McGraw-Hill, 1959
2) 若佐・余越・細田；京大防災年報 27B-2 3) Newman, Launder, Lumely; J.F.M. Vol. 111

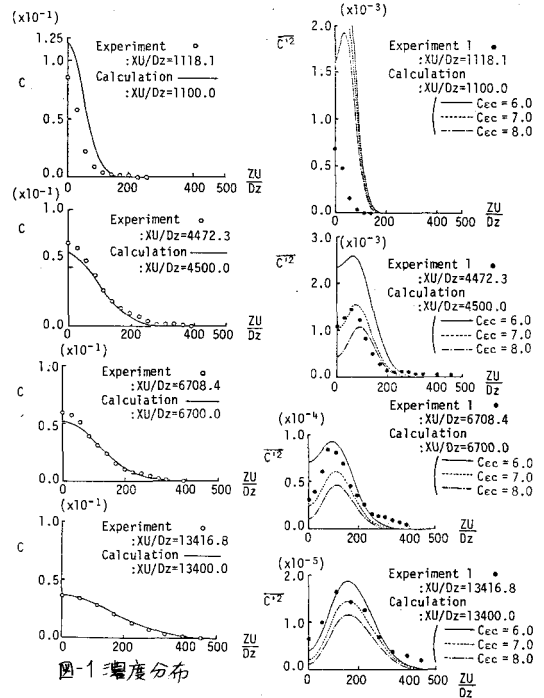


図-1 濃度分布

図-2 濃度変動分布

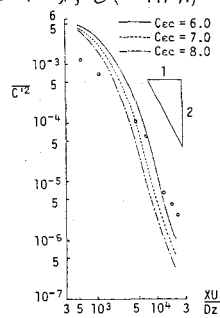


図-3 C''の減衰

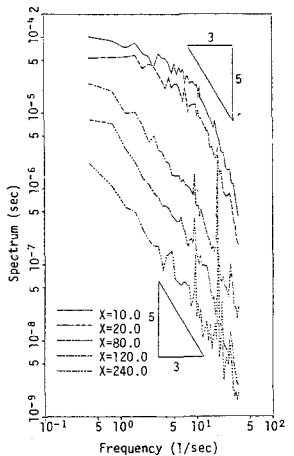


図-4 流下方向のスペクトルの分布