

水理学を対象とした境界要素法の適用について(その3)

京都大学工学部 正 員 岩佐 義朗 京都大学工学部 正 員 芳田 彰秀
大 阪 市 正 員 山野 一弥 ○京都大学大学院 学生員 福本 育史

1. はじめに: 境界要素法は、原理的には線形問題にしか適用できない数値解析法であるが、最近では時間依存問題あるいは非線形問題へ拡張されつつある。本報では、水理現象における非線形問題への境界要素法の適用を最終目標におき、その第一段階として理論解の存在する拡散現象に境界要素法を適用し、移流項の評価法について考察したものである。

2. 基礎方程式およびその定式化: 平面二次元流れ内での乱流におけるFickの拡散方程式は、

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (D_m + K_x) \frac{\partial C}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ (D_m + K_y) \frac{\partial C}{\partial y} \right\} \quad (1)$$

で与えられる。ここで $K_x \gg D_m$ で、 D_m (分子拡散係数) は無視される。②等方性とし、 $K_x = K_y = K$ とする。③ x 方向の移流速度 u は一定値、 y 方向の移流速度 v は零とする。これらの仮定を適用して書き直した次式について、次のような初期・境界条件を設定する。

$$\text{支配方程式: } \frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = K \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

初期条件 ; $C_0 = M S(r)$ at $t = t_0$ (3) 境界条件 ; $C = 0$ at $r = +\infty$ ($r = \sqrt{x^2 + y^2}$) (4)

(3), (4) 式を用いて (2) 式を解くと次の理論解が得られる。 $C(x, y, t) = \frac{M}{4Kt} \exp \left\{ -\frac{(x-ut)^2 + y^2}{4Kt} \right\}$ (5)

さて、(2) 式の離散化を行うにあたり、時間依存性を有する基本解として G を適用する。
($G = \frac{1}{4\pi K(t-\tau)} \exp \left\{ -\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4K(t-\tau)} \right\}$) 時刻 $t = n\Delta t$ 、点 i について G を用いて (2) 式を前報と同様に離散化すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} & C^i(x, y, t) + K \int_{\Gamma} \int_0^{t-\Delta t} C \frac{\partial G}{\partial n} d\Gamma + K \int_{\Gamma} \left\{ \frac{C^{n-1} + C^n}{2} \int_{t-\Delta t}^t \frac{\partial G}{\partial n} d\tau \right\} d\Gamma + \int_{\Omega} \int_0^{t-\Delta t} u \frac{\partial G}{\partial x} C d\tau d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \left\{ \frac{u}{2} \left(\frac{\partial C}{\partial x} \right)^{n-1} \int_{t-\Delta t}^t G d\tau \right\} d\Omega + \int_{\Omega} \left\{ \frac{u}{2} \left(\frac{\partial C}{\partial x} \right)^n \int_{t-\Delta t}^t G d\tau \right\} d\Omega \\ & = \int_{\Gamma} \int_0^{t-\Delta t} \frac{\partial C}{\partial n} G d\tau d\Gamma + \int_{\Gamma} \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial C}{\partial n} \right)^{n-1} + \left(\frac{\partial C}{\partial n} \right)^n \right\} \int_{t-\Delta t}^t G d\tau d\Gamma + \int_{\Omega} C \frac{1}{4\pi K t} \exp \left\{ -\frac{r^2}{4Kt} \right\} d\Omega \quad (6) \end{aligned}$$

尚、関数 C は領域要素内において一次関数で表されるものと仮定する。 ($C = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y$)

次に、離散化された (6) 式の移流項に関する二種類の評価法について紹介する。まず解法 A は、移流項を 1 ステップ前の濃度の値を用いて外力項として評価するもので、(6) 式の左辺第 6 項において $\left(\frac{\partial C}{\partial x} \right)^n \approx \left(\frac{\partial C}{\partial x} \right)^{n-1}$ と近似して解く方法である。一方解法 B は、 $\left(\frac{\partial C}{\partial x} \right)^n$ を n ステップで評価し、繰返し計算によって濃度を計算するもので、最初に境界上の第一次近似解を求めるために (6) 式の左辺第 6 項を零と置く。したがって (6) 式には、領域内の未知項が存

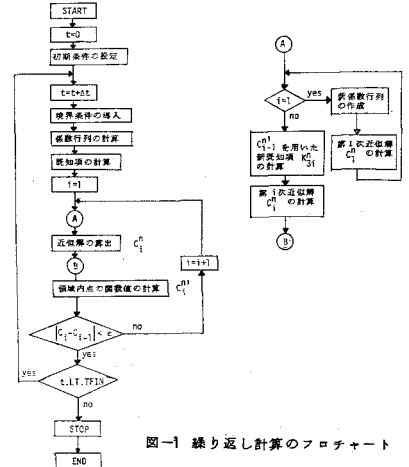


図-1 繰返し計算のプロチャート

在しないので、容易に解くことができ、結果として境界上の第一次近似解 C_i^m が得られる。次に C_i^m を用いて内部要素の節点における関数値 C_i^n が求められる。これらの値を式(4)に代入してマトリックスを解くことにより、境界上の第二次近似解 C_i^{m+1} が得られる。以下同様に計算を繰り返す。尚、図-1に解法Bのフローチャートを示している。ただし、 C_i^{m+1} は九番目の時間ステップにおける繰返し計算n回目の関数値を示す。また(1)の印は領域内の関数値を示す。解の収束判定については、境界上のすべての節点で $|C_i^m - C_i^{m+1}| < \epsilon$ ($\epsilon > 0$) を満足するとき、 C_i^m が境界上の関数値 C^m として決定される。

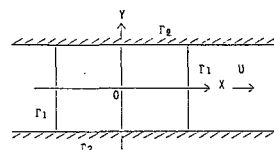


図-2 平面二次元流れの座標系

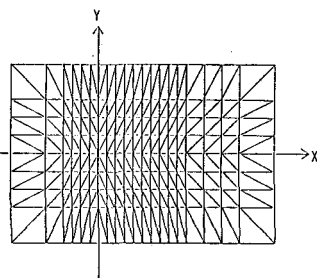


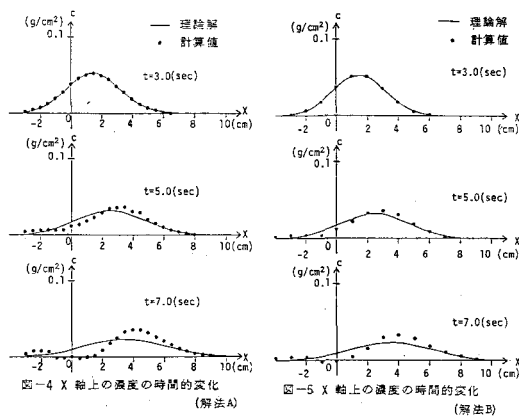
図-3 メッシュ (内部要素)

3. 計算結果および考察：対象とする現象は、図-2に示すような平面二次元水路において、原点で質量 $M=1.0g$ の物質を、 $t=0(sec)$ に瞬間的に投入するものとした。境界条件としては、 Γ_1 上で基本境界条件 $C=0$ を、 Γ_2 上で自然境界条件 $\frac{\partial C}{\partial n} = 0$ を与えている。解析する拡散現象のスケールから判断すれば、水路の境界は、 X, Y 方向と十分に離れた所に位置すると考えられ、

理論解を求める際に用いた境界条件(4)式は、対象領域で満足されているものと考えられる。数値計算を行うにあたり、用いた内部要素は、図-3に、諸計算条件は表-1に示している。初期条件としては、デルタ関数の性質上取扱いが困難なため、 $t=T_0(sec)$ における理論解を用いた。上述の条件の下で、解法A,Bのそれぞれについて、投入後の濃度変化を示したものが図-4,5である。解法A,Bともに場所によって若干のばらつきが存在するものの、 $t=3, 5(sec)$ では

表-1 計算条件

K (cm^2/sec)	U (cm/sec)	Δt (sec)	T_0 (sec)
0.5	0.5	0.5	2.0



理論解と良い一致を示しているといえる。しかしながら、時間の経過とともに精度の悪化が認められ、さらに検討が必要である。また、解法A,Bを比較すれば、時間の経過とともに解法Bの方がわずかながら理論解に近い値を示していることがわかる。これは解法Aにおいて、 $(\frac{\partial C}{\partial n})^m \approx (\frac{\partial C}{\partial n})^{m-1}$ と近似したことに起因していると考えられる。

4. おわりに：今回、理論解と比較検討するために $U=-一定$, $V=0$ という条件の下で数値解析を行い、計算初期段階では境界要素法の有効性が認められた。時間の経過とともに、精度悪化の問題が現れるが、これについては高次式での関数Cの近似化、時間一次内挿法の導入、解法Bにおける収束判定条件の再検討により改善されるものと考えられる。今後、 U, V を関数として取り扱うことにより、実現象へ拡張していく考えである。

参考文献：1) 日野幹雄：流体力学、朝倉書店(1974) 2) 岩佐、治：水理学を対象とした境界要素法の適用について(4)(2), S41 年度土木学会関西支部E-49 (1984) 3) 飯梨、中健、吉川：境界要素法の非定常拡散問題への適用, S.48年度土木学会年次講演会E-74(1990)