

地下水流動モデルの有限要素法による誤差分析

京都大学防災研究所 正員 池淵 周一
京都大学大学院 学生員 森岡 武一

1. はじめに 本研究は平面二次元的な浅層地下水流動の解析に有限要素法を適用し、境界条件や外力項の誤差構造が地下水頭へ時間的、空間的にどのように伝播されていくかを分析するものである。それによって滞水層定数同定問題が有効に機能するような地下水位の観測ネットワークの構成法などを考察する。

2. モデルとその解法 浅層地下水が地表に近い層群に胚胎される弱被圧地下水および自由地下水であることから、これを不圧地下水とみなし、地下水頭は地下水位と等しく鉛直方向に変化せず、地下水の流動は横方向のみを考える。また、簡単のために不飽和浸透流の存在、透水係数および有効間隙率の鉛直方向の変化を考慮せず、浅層地下水の層厚が薄いことを考慮して、水の密度、透水係数および有効間隙率の圧力水頭の大小による変化を無視する。以上のような仮定から、不圧水の準平面二次元モデルが構成され、ダルシー則および水の連続式に基づいて浅層地下水の基礎方程式が式(1)として得られる。境界条件と初期条件は式(2), (3), (4)のとおりである。これらの数値解析に Galerkin 有限要素法を用い、対象とする領域全体を三節点三角形要素に区分し、線形内挿関数を用いる。方程式(1)を定式化して得られた連立偏微分方程式の時間微分項を差分近似すると平均地下水位ベクトルは式(5)のように与えられる。ここで、 A および B は求める平均地下水位を含むため、許容精度に達するまで反復計算が必要である。一方、地下水位の共分散行列は第一近似として A および B が確定的であり誤差をもたないと仮定すれば、外力項が確率変数である場合には式(6)のようになる。すなわち、初期条件の地下水位の平均値と分散から順次共分散行列と平均値ベクトルが求まる。

3. 計算例と考察 図1のような仮想領域において、市街地と水田の透水係数は丘陵地のそれよりも小さい値であるとする。また、市街地では降雨によるかん養量が水田より小さく、丘陵地は逆

$$\frac{\partial}{\partial x} \{k(h-z) \frac{\partial h}{\partial x}\} + \frac{\partial}{\partial y} \{k(h-z) \frac{\partial h}{\partial y}\} + Q = n' \frac{\partial h}{\partial t} \quad (1)$$

$$k(h-z) \frac{\partial h}{\partial x} n'_x + k(h-z) \frac{\partial h}{\partial y} n'_y \Big|_{(x,y) \in \Gamma_1} = q(x,y,t) \quad (2)$$

Γ_1 : Neumann boundary

$$h(x,y,t) \Big|_{(x,y) \in \Gamma_2} = H(x,y,t) \quad (3)$$

Γ_2 : Dirichlet boundary

$$h(x,y,t) \Big|_{t=0} = h_0(x,y) \quad (4)$$

k : 透水係数 h : 地下水位 z : 基準高さ

Q : 地下水涵養量 n' : 有効間隙率

n'_x, n'_y : 境界の外向き法線の方向余弦

$$\bar{h}_{t+\Delta t} = A^{-1} B \bar{h}_t + A^{-1} C Q + A^{-1} D q + A^{-1} F \quad (5)$$

$$\text{Var}[\bar{h}_{t+\Delta t}] = A^{-1} B \Sigma (A^{-1} B)^T + A^{-1} C E (A^{-1} C)^T \quad (6)$$

$\bar{h}_{t+\Delta t}$: 求める時間ステップの平均地下水位

$\bar{h}_t$: 前時間ステップの平均地下水位

A, B, C : 節点座標、有効間隙率、基準高さ、

現および前時間ステップの平均地下水位、

透水係数を含む係数行列

Q : 地下水涵養量ベクトル

q : 境界流入量ベクトル

F : Dirichlet境界条件の導入による行列

Σ : 前時間ステップの共分散行列

E : 涵養量の共分散行列

に水田よりもやや大きく、さらに土地利用が水田の場合には揚水および水田からのかん養量両者を考慮して、これら各土地利用に対して正味かん養量の時間的、空間的分散構造を与えた。また、蒸発散や深層地下水への漏水などは地下水位の自然減水曲線から与え、その値は場所にかかわらず一定とした。時間ステップはすべて1日である。初期条件としては共分散行列はすべて0とし、平均値ベクトルは流動層厚がすべての点で等しくなるようにおいた。得られた結果は図2から図5である。図2は外力項のみが確率変数である場合の地下水位の標準偏差の空間分布であるが、これが主に土地利用によって左右されることかわかる。また図3は境界流入量が確率変数である場合であるが、境界上でのみ大きく、内部ではごく小さい値をとりほとんど無視できる。図4をみると標準偏差はある時間までは増大するが、それ以降は外力項の変動ほどは大きくなく、かなり平滑化されている。図5をみると5日目程度までは外力項の誤差に強く反応するが、8日目ごろからは従前の誤差の影響をうけて、異なる反応を示すことがわかる。以上から、滞水層定数の同定に先だて水位の一斉観測を行ない、その後5日目程度までの各土地利用、境界での水位から外力項および境界流入量の解析を行ない、これをより確定的にする必要があると推測できる。

4. おわりに 以上、外力項および境界流入量が誤差をもつ場合の伝播特性を解析したが、今後は式(5)のAやBそのものの確率変数的取り扱い及びA、Bに含まれる滞水層定数などの誤差伝播特性、さらには不飽和浸透流の導入や被圧滞水層との交互作用の明確化、山地周辺への適用の拡大など検討していきたい。

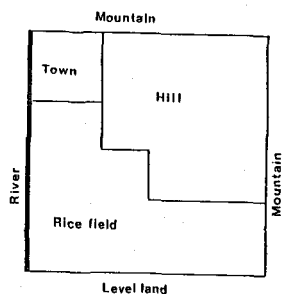


図1 対象領域と土地利用

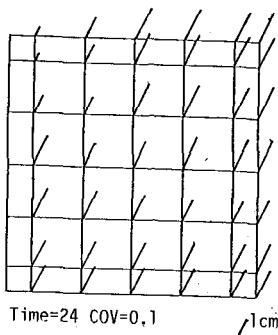


図2 標準偏差の空間分布

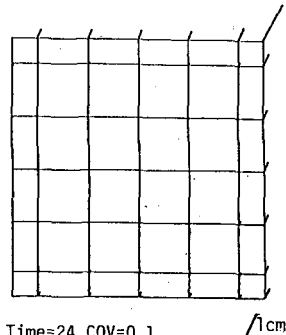


図3 標準偏差の空間分布

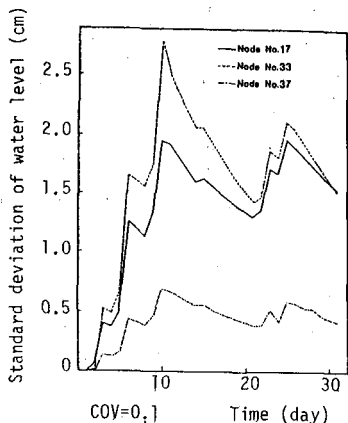


図4 標準偏差の時間変動

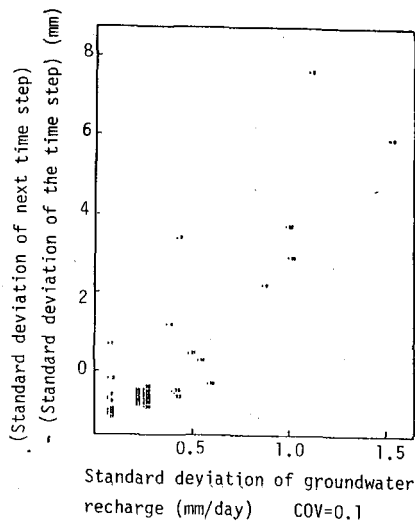


図5 標準偏差の増分と涵養量の誤差との関係