

双対定理を利用した構造物の最適設計

京都大学工学部 正 員 小林 昭一
 京都大学工学部 正 員 田村 武
 日本国有鉄道 正 員 ○平松 祐之
 京都大学大学院 学生員 仲山 公規

1. はじめに

従来の最小重量設計では逐次計算法の適用を比較的容易にするため凸計画問題のみを対象としたが、実際の最適設計においては実行可能領域が凸とならない、いわゆる非凸問題を扱う場合もある。そこで本報文では、非凸問題の中で扱いの容易な準凸問題の例として簡単なトラスをとりあげ、凸計画問題に対し成立した強双対定理の非凸問題への適用を考察すると同時に双対問題の大きな利点であるLagrange乗数を用いた感度分析についても考察し、最適設計への有効性を検証する。

2. 非凸における主問題

例としてFig.1に示す7節点11部材の静定トラスを考え、複数の集中荷重を作用させる。このトラスに対し節点5の鉛直下方変位を許容内に抑え、同時に各部材の応力を許容応力以内とする2種の制約の下で重量を最小にする問題を主問題として(2.1)式の形で定式化する。(変数は部材断面積)

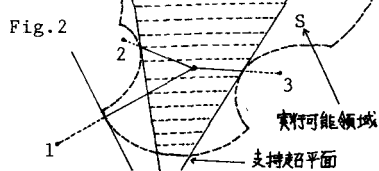
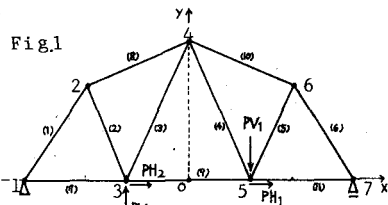
制約行列 b_{ij} が全て非負ならば、全制約関数が凸関数となり凸計画問題となる。しかし、Fig.1の様に複数の荷重を不規則に作用させると変位条件の係数 b_{ij} の中に負要素が存在し制約条件の凸性を崩すことになる。従って問題は非凸となり、主問題は支持超平面等の適用に不都合となる。この理由は、Fig.2の様に凹部の存在により超平面では実行可能領域を正確に近似できないためである。しかし、ここで変数を

$$\lambda_i = 1/A_i \quad (\text{断面積の逆数}) \quad \dots (2.2)$$

に変えると、(2.1)式は非線形凸目的関数及び線形制約条件からなる凸問題(2.3)式に変わり、勾配法の利用に好都合となる。ただし、制約条件への考察も必要なので(2.3)式の解法には縮小勾配法を適用し主問題を解くこととした。

3. 非凸における双対問題

(2.2)式により、(2.1)式で凸性を崩す原因となった非線形変位制約が(2.3)式では線形制約となり、問題は従来の凸計画に帰着され、準凸性のSlaterの制約想定(3.1)式が成立し(3.2)式の強双対定理が2.で挙げた非凸問題にも成立する。



$$\begin{aligned} \text{目的関数} \quad f(A) &= \sum_{i=1}^N \rho L_i A_i \rightarrow \min \\ \text{sub. to} \quad \begin{cases} g_1(A) = \sum_{i=1}^N b_{1i}/A_i - U_1 \leq 0 \\ \vdots \\ g_m(A) = \sum_{i=1}^N b_{mi}/A_i - U_m \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N: \text{部材数} \quad m: \text{制約条件数} \\ A_i: \text{断面積} \quad U_i: \text{制約上限値} \\ L_i: \text{部材長} \quad \rho: \text{部材密度} \end{aligned} \quad \dots (2.1)$$

$$\begin{aligned} \text{目的関数} \quad f(X) &= \sum_{i=1}^N \rho L_i / X_i \rightarrow \min \\ \text{sub. to} \quad \begin{cases} g_1(X) = \sum_{i=1}^N b_{1i} X_i - U_1 \leq 0 \\ \vdots \\ g_m(X) = \sum_{i=1}^N b_{mi} X_i - U_m \leq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad \dots (2.3)$$

Masayuki HIRAMATSU

しかし、凸計画での双対問題の様にLagrange乗数 λ の初期値を自由には与えられない。つまり、制約行列 b_i に負値が存在するため(3.4)式の根号内の正負が問題となる。しかし、双対問題の目的関数 $W(\lambda)$ は凹関数であることから、初期の

$$W(\lambda) = \sum_{i=1}^m C_i^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{j=1}^n \lambda_j b_{ji} \right]^{\frac{1}{2}} + \sum_{k=1}^m \lambda_k \left(\sum_{j=1}^n C_j^{\frac{1}{2}} b_{kj} \left[\sum_{i=1}^m \lambda_i b_{ji} \right]^{\frac{1}{2}} \right) - \sum_{j=1}^n u_j \lambda_j$$

(3.3), (3.4) 参照

* $C_i = \rho L_i$

λ を(3.4)式の根号内が正になる様に一宜定めれば、改めて適用する縮小勾配法の性質上、根号内の正負条件を満たしたまま最適方向に進むと考えられる。従って条件付きであるが、凸計画同様の双対問題の定式化が可能となる。

4. 解析解及び感度分析

Fig.1に示すモデルを使い主及び双対問題を解析していく。ただし、共に縮小勾配法を用いるが双対問題では主問題の様に基底変数を扱う必要がない。解析結果は、Table.1に示している。厳密に(3.2)式を満たすとはいえないが、一般に弱双対定理(3.5)式が成立する事を考えれば精度としては充分であろう。次に双対問題の重要点として、最終的に得られたLagrange乗数 λ による感度分析が挙げられる。これは、各制約上限値 u_i の変動から最適値関数の変動を知るもので、各 $(-\lambda_i)$ が u_i に対する最適値関数 $\phi(u)$ の変動を示す勾配である事が背景とな、ている。

$$\phi(u) = \text{Max}_{(\lambda)} W(\lambda)$$

従って $\frac{\partial \phi(u)}{\partial u_i} = -\lambda_i$ (最終Lagrange乗数)

Table.2に示す各乗数 λ_i を利用し、複数の制約条件を微小変動させた時の感度分析による重量の予想値と解析値をTable.3に示す。明らかに、非常に近い値となっており感度分析の有効性を示すのに充分であると同時に、非凸問題に対する双対理論の適用が条件付きで可能であると判断できる。なお、Table.4には主及び双対問題の解析並びに感度分析に用いた諸設定条件を示すものとする。

• Slaterの制約想定

* 制約関数 $g_i(x)$ が全て凸関数かつ $g_i(x_0) < 0$ なる x_0 が存在すること。
----- (3.1)

強双対定理 $P = D$ ----- (3.2)
主問題解 P , 双対問題解 D

• 双対問題 $\text{Max}_{(\lambda)} \text{min}_{(\lambda)} L(A, \lambda)$

$$L(A, \lambda) = \begin{cases} f(A) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(A) & (\lambda_j \geq 0) \\ -\infty & (\lambda_j < 0) \end{cases}$$

----- (3.3)

• $\frac{\partial L(A, \lambda)}{\partial A_i} = 0$ によって

$$W(\lambda) = \text{min}_{(\lambda)} L(A, \lambda)$$

を求める。

$$\text{ただし、 } A_i = \sqrt{\sum_{j=1}^m \lambda_j b_{ji} / \rho L_i}$$

----- (3.4)

弱双対定理

$$P \geq D \text{ ----- (3.5)}$$

Table.1 断面積(cm²)

部材	P	D		
NO.1	3,144	3,138	総重量	(kg) 2248.837
NO.2	2,344	2,389	Lag.関数	2242.687
NO.3	48,215	47,294		
NO.4	65,007	64,986		
NO.5	39,844	39,262		
NO.6	53,478	52,664		
NO.7	48,437	47,507		
NO.8	3,294	3,247		
NO.9	45,838	45,007		
NO.10	56,021	54,902		
NO.11	26,562	26,434		

Table.2

制約条件	節点	部材	NO.1	NO.2	NO.3	NO.4	NO.5
Lag.乗数	217.64	34.99	29.67	290.21	381.36	154.96	
Lag.乗数	185.85	223.52	45.43	234.95	285.01	110.75	
制約条件	NO.6	NO.7	NO.8	NO.9	NO.10	NO.11	

Table.3

予想値	解析値
(93) 2289.91	2289.18

Table.4

感度分析 変更条件 5	節点 (X,Y) -cm-
許容変位 0.18→0.17 cm	NO.1 (-800, 0) NO.5 (300, 0)
許容応力 { 200 → 195	NO.2 (-600, 400) NO.6 (600, 400)
{ 部材 3,4	NO.3 (-300, 0) NO.7 (800, 0)
{ 180 → 175	NO.4 (0, 600)
{ 部材 7,10	

対称構造

ヤング率 $E=1800000 \text{ kg/cm}^2$ 許容応力度 部材 (1) ~ (6) 200
部材密度 = 0.01 kg/cm^3 (7) ~ (11) 180 kg/cm^2
複数集中荷重 $P_H=4500 \text{ kg}$ $P_W=9000 \text{ kg}$
 $P_H=4500 \text{ kg}$ $P_W=18000 \text{ kg}$
変位制約 節点NO.5 最大許容変位 (鉛直下方) 0.18 cm

参考文献

福島雅夫, 「非線形最適化の理論」, 数理計画法4, 1980

刀根 薫, 「数理計画」, 基礎の数学, 4章, 1978

平松祐之 「双対定理を利用した構造物の最適設計」, 京都大学大学院 修士論文, 1985