

## 統計データに基づく混合分布の利用

阪神高速道路公団

正会員 中島 裕之

総合技術コンサルタント

正会員 久保 雅邦

同 上

正会員○石田 良三

## 1. まえがき

土木構造物の安全性を評価する上で重要な課題の一つに、荷重の確率統計的評価がある。たとえば、道路橋の活荷重や温度荷重あるいは風荷重等について、近年統計データを用いたモデル化の研究が進められている。通常、モデル化における確率分布のあてはめでは、既存の単一分布が用いられることが多いが、統計データによっては混合分布を適用すべき場合がある<sup>1)</sup>。本研究は、このような混合分布のあてはめについて考察したもので、主として活荷重実態調査<sup>2)</sup>の中で取り扱った双峰分布のあてはめ方法を中心に報告する。

## 2. 混合分布の分類

確率変数  $X$  の確率密度関数  $f(x)$  を 2 種類の関数  $f_1(x), f_2(x)$  を用いて表わす場合を考える。 $f_1(x), f_2(x)$  がそれぞれ単一の分布を表わし、あてはめる変数の範囲によって、まず混合分布を表-1 の 2 つに分類し、 $f(x)$  の模式図を図-1 に示す。それぞれの混合分布の意味するところは明白であろう。また、その一例を図-2 及び図-3 に示す。図-2 は本四ルートにおける月最大平均風速の例であり、図-3 は著者らが扱った阪神高速道路における大型車種の車両重量の頻度分布である。

表-1 混合分布の分類

|        | 分離型<br>混合分布                                                               | 混在型<br>混合分布                                        |
|--------|---------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------|
| $f(x)$ | $f_1(x) \quad (x \leq x_0)$<br>$f_2(x) \quad (x_0 < x)$<br>( $x_0$ : 分離点) | $P f_1(x) + P_2 f_2(x)$<br>( $x$ : 全範囲)<br>—— 式(1) |

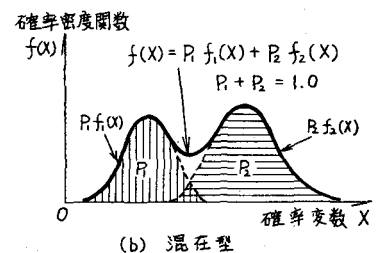
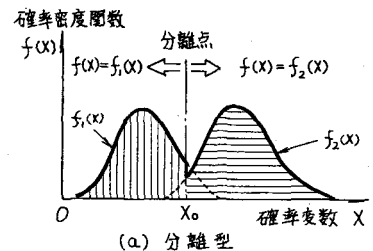
## 3. あてはめの方法

一般に、確率分布のあてはめには、確率紙による方法、モーメント法、最尤法、最小二乗法等がある。分離型の場合、図-2 から明らかなように、確率紙を用いて容易に 2 つの単一分布に分解することができる。一方、混在型の場合確率紙を利用することが困難であり、本研究では最小二乗法による数値計算によって、統計データから直接混合分布のパラメーターを算出する方法を用いた。

統計データより得られた確率変数  $X_i (i=1, 2, \dots, n)$  の相対頻度を  $f_0(X_i)$  とし、これとあてはめる混合分布  $f(x)$  (式(1)) との間で、分布のあてはめの度合いを示す指標  $E$  を次式

$$E = \sum_{i=1}^n \{f_0(X_i) - f(X_i)\}^2 \quad \text{—— 式(2)}$$

で与える。

図-1  $f(x)$  の模式

Hiroyuki NAKAJIMA, Masakuni KUBO, Ryoza ISHIDA

式(2)に含まれる未知パラメーターは、 $P_1$  (あるいは $P_2$ ) と  $f_1(X)$ ,  $f_2(X)$  に含まれる分布のパラメーター (たとえば、平均値 $\mu$ と標準偏差 $\sigma$ ) の合計5つである。したがって、 $E$ の値を最小とするような5つのパラメーターを得ることで混合分布が決定される。すなわち、次の連立方程式を解くことによって解が得られる。

$$\frac{\partial E}{\partial P_1} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial \mu_1} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial \sigma_1} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial \mu_2} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial \sigma_2} = 0 \quad \text{式(3)}$$

一般に、式(3)は非常に複雑な非線型連立方程式となり、Newton-Raphson法<sup>3)</sup>を用いて収束計算を行なった。

#### 4. 計算結果

計算例として、図-3の頻度分布において、 $f_1(X)$ を正規分布、 $f_2(X)$ を対数正規分布と仮定して求めた結果を示す。得られたパラメーターの値と混合分布の確率密度関数は、図中に示すとおりである。さらに、これを対数正規確率紙上で確率分布関数によって示したものが図-4である。また、 $E$ の値がパラメーターによりどのように変化するかを調べた結果を図-5に示す。 $P_1$ 以外のパラメーターを固定して、 $P_1$ による $E$ の変化をプロットしたものである。

以上の結果では、各パラメーターの初期値を収束値の近傍に設定しており、十分安定した収束となった。しかしながら、上記の解法は初期値の設定に非常に敏感であり、初期値によっては解が発散する結果となった。今後の改善点である。

#### 5. 参考文献

1) 藤野・伊藤・酒井：年最大風速記録による設計基本風速の算定に関する研究，土木学会論文報告集，NO. 305，1981年1月

2) 阪神高速道路公団：HDL委員会報告書，昭和59年3月

3) 土木学会編：新体系土木工学1 数値計算法，技報堂

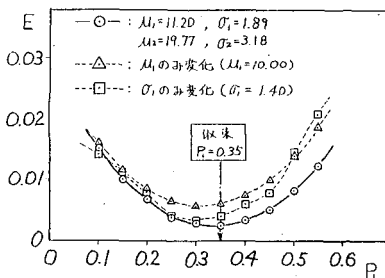


図-5 収束値近傍での $E$ の変化

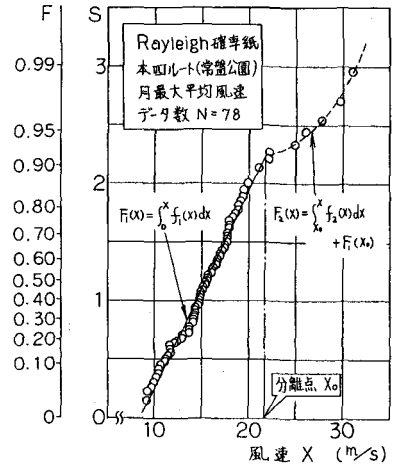


図-2 月最大平均風速の例

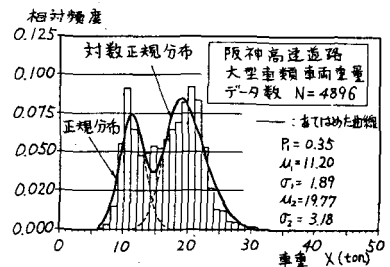


図-3 大型車種の車両重量の頻度分布

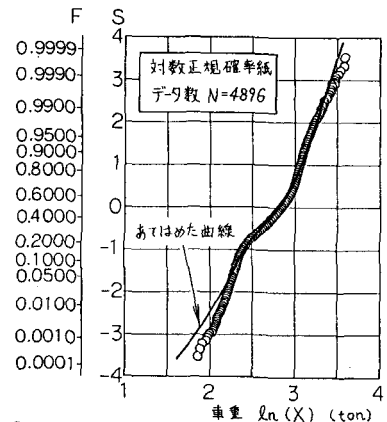


図-4 混合分布の確率分布のあてはめ