

## はり一柱の弾塑性有限変位解析

関西大学工学部 正会員 米澤 博

関西大学工学部 正会員 堂垣正博

関西大学大学院 学生員 築森 泉

関西大学大学院 学生員○柳迫康博

1. まえがき 通常、構造部材として用いられるはりや柱には種々の初期不整が含まれる。初期不整のうち、水平や鉛直方向の初期たわみを有する部材の耐荷力解析は非常に多くなされているが、初期ねじれも含めた解析は比較的少ないようである。ここでは水平・鉛直方向の初期たわみと初期ねじれを有する二軸対称薄肉断面部材に偏心軸圧縮力、端曲げモーメント、ねじりモーメント、等分布横荷重などが作用する場合を対象に、変位の二次項を考慮した弾塑性有限変位解析を差分法で行い、その終局強度を明らかにする。

2. 解析上の仮定 1) 部材は完全弾塑性体で、ひずみ硬化は考えない。2) 局部座屈は考えない。3) 断面に比べ十分な長さを持つものとし、せん断変形による付加変位は考えない。4) 塑性化に伴うせん断中心の移動は無視する。5) 板厚は十分に薄いものとする。

3. 弾塑性状態の支配方程式 変形前の左端断面の図心Oを原点とし、図心軸をx軸に、断面の主軸をy, z 軸に選ぶ固定直交座標系O-xyzを用いる。断面の任意点のx, y, z 方向の荷重による変位 $u_g, v_g, w_g$ は図心でのx, y, z 方向の全変位 $u, \bar{v}, \bar{w}$ 、全ねじり角 $\bar{\phi}$ 、初期不整 $v_0, w_0, \phi_0$ 、図心を極とする正規化された単位そり関数 $\omega_n$ を用いて次のように表される。

$$u_g = u - y \cdot (\bar{v}_x - v_{0,x}) - z \cdot (\bar{w}_x - w_{0,x}) + \omega_n \cdot (\bar{\phi}_x - \phi_{0,x}) \quad (1)$$

$$v_g = (\bar{v} - v_0) - z \cdot (\bar{\phi} - \phi_0) \quad (2)$$

$$w_g = (\bar{w} - w_0) + y \cdot (\bar{\phi} - \phi_0) \quad (3)$$

ただし、コンマに続く添字はそれに関する微分を表す。

弾塑性状態の部材を弾性状態とし、幾何学的非線形性を考えたひずみは次のようになる。

$$\epsilon_x = u_{,x} - y \cdot (\bar{v}_{,xx} - v_{0,xx}) - z \cdot (\bar{w}_{,xx} - w_{0,xx}) + \omega_n \cdot (\bar{\phi}_{,xx} - \phi_{0,xx}) + y \cdot (\bar{w}_{,x} \bar{\phi}_x - w_{0,x} \phi_{0,x}) - z \cdot (\bar{v}_{,x} \bar{\phi}_x - v_{0,x} \phi_{0,x}) + \frac{1}{2} \{ \bar{v}_{,x}^2 - v_{0,x}^2 + \bar{w}_{,x}^2 - w_{0,x}^2 + (y^2 + z^2)(\bar{\phi}_x^2 - \phi_{0,x}^2) \} \quad (4)$$

$$\tau_{xy} = (\omega_n y - z)(\bar{\phi}_x - \phi_{0,x}) + y \cdot (\bar{\phi} \bar{\phi}_x - \phi_0 \phi_{0,x}) + (\bar{w}_x - w_{0,x})(\bar{\phi} - \phi_0) \quad (5)$$

$$\tau_{xz} = (\omega_n z + y)(\bar{\phi}_x - \phi_{0,x}) + z \cdot (\bar{\phi} \bar{\phi}_x - \phi_0 \phi_{0,x}) - (\bar{v}_x - v_{0,x})(\bar{\phi} - \phi_0) \quad (6)$$

弾性有限変位解析の支配方程式を仮想仕事の原理から誘導し、塑性化の進展に伴う剛性低下の影響を仮想荷重とした弾塑性状態の支配方程式を誘導すると、次のようになる。

$$N_{x,x} = 0 \quad (7)$$

$$M_{z,xx} + N_x \cdot \bar{v}_{,xx} - M_{y,x} \cdot \bar{\phi}_x - M_{y,x} \cdot \bar{\phi}_{,xx} = -q_y \quad (8)$$

$$M_{y,xx} + N_x \cdot \bar{w}_{,xx} + M_{z,x} \cdot \bar{\phi}_x - M_{z,x} \cdot \bar{\phi}_{,xx} = -q_z \quad (9)$$

$$I_{cp} \cdot N_x \cdot \bar{\phi}_{,xx} / A + M_{x,x} + M_{z,x} \cdot \bar{w}_x + M_{z,x} \cdot \bar{w}_{,xx} - M_{y,x} \cdot \bar{v}_x - M_{y,x} \cdot \bar{v}_{,xx} = -m_x \quad (10)$$

同様に、両端の境界条件は次のようになる。

$$N_x = nN_0 \quad \text{or} \quad u = C_1 \quad (11)$$

$$N_x \cdot \bar{v}_x + M_{y,x} \cdot \bar{\phi}_x + M_{z,x} = 0 \quad \text{or} \quad \bar{v} = C_2 \quad (12)$$

Hiroshi YONEZAWA, Masahiro DOGAKI, Izumi TSUKIMORI and Yasuhiro YANAGISAKO

$$N_x \cdot \bar{w}_{,x} + M_z \cdot \bar{\phi}_{,x} + M_{y,x} = 0$$

$$M_z = -n (M_{z0} + N_{x0} \cdot e_{y2})$$

$$M_y = n (M_{y0} + N_{x0} \cdot e_{z2})$$

$$M_w = 0$$

$$I_{cp} \cdot N_x \cdot \bar{\phi}_{,x} / A + M_x + M_z \cdot \bar{w}_{,x} - M_y \cdot \bar{v}_{,x} = n M_{x0}$$

$$\text{or } \bar{w} = C_3 \quad \text{--- (13)}$$

$$\text{or } \bar{v}_{,x} = C_4 \quad \text{--- (14)}$$

$$\text{or } \bar{w}_{,x} = C_5 \quad \text{--- (15)}$$

$$\text{or } \bar{\phi}_{,x} = C_6 \quad \text{--- (16)}$$

$$\text{or } \bar{\phi} = C_7 \quad \text{--- (17)}$$

ただし、 $A$ は断面積、 $I_{cp}$ はせん断中心に関する断面二次極モーメント、 $C_1 \sim C_7$ は定数、 $N_x, M_y, M_z, M_x, M_w$ はそれぞれ軸力、 $y$ と $z$ 軸回りの曲げモーメント、ねじりモーメント、そりモーメントで、 $q_y, q_z, m_x$ と下添字0つきの断面力は外荷重である。また、 $e_{y2}, e_{z2}$ は軸力の $y, z$ 軸方向の偏心量であり、 $n$ は部材の左端で-1、右端で+1である。

上式の弾塑性状態における断面力は弾性状態を仮定した場合の断面力 $N_x^e, M_y^e, M_z^e, M_x^e, M_w^e$ と仮想断面力 $N_x^p, M_y^p, M_z^p, M_x^p, M_w^p$ を用いて定義できる。たとえば、 $N_x = N_x^e - N_x^p$ 。降伏判定にはvon Misesの等価応力式を用い、仮想断面力は次のようにして求める。すなわち、弾塑性状態にある部材を弾性状態に仮定して求められる等価応力が降伏点応力を越える場合、その超過応力を断面全体にわたって積分することによって求められる。

式(7)~(10)は非線形方程式であり、厳密解を求めることは非常に難しい。ここでは差分法を用い、非線形多元連立方程式に変換後、修正Newton-Raphson法で解を求める。

**4. 数値解析結果** 差分解の精度を調べた結果、スパン方向に20分割すれば精度良い解の得られることが分かった。以下の計算では、スパン方向に半波の正弦波の初期たわみと初期ねじれを用いる。また、降伏点応力は $q_p = 3600 \text{ kg/cm}^2$ とした。

鉛直方向初期たわみの最大値がスパンの1/5000, 1/2000, 1/1000, 1/500で、両端単純支持の薄肉箱形断面柱に軸圧縮力が作用する場合、終局荷重と修正細長比 $\bar{\lambda}$ の関係はFig.1のようになる。図中、破線は初期たわみが1/1000のSchulzの解を示す。図から分かるように、本解はSchulzの結果とよく一致している。

最大値が1/1000の鉛直方向初期たわみと $\phi_0 = 0^\circ, 0.5^\circ, 1^\circ$ の初期ねじれを有し、軸圧縮力と端曲げモーメントが作用する場合の荷重-付加たわみ曲線をFig.2に示す。ただし、 $\bar{\lambda} = 0.5$ 、端曲げモーメントと軸圧縮力の割合を表す比が $(M_{z0}/M_{pz})/(N_0/N_p) = 1.0$ の場合である。ここに、 $N_p$ は全塑性軸力、 $M_{pz}$ は $z$ 軸回りの全塑性モーメントで、●印は初期降伏である。初期ねじれを有する場合、初期の荷重段階では初期ねじれのない荷重-付加たわみ曲線に一致する。終局状態に近づくにつれて荷重-付加たわみ曲線には初期ねじれの大小によって差が生じ、 $\phi_0$ が大きいほど耐荷力は低下する。

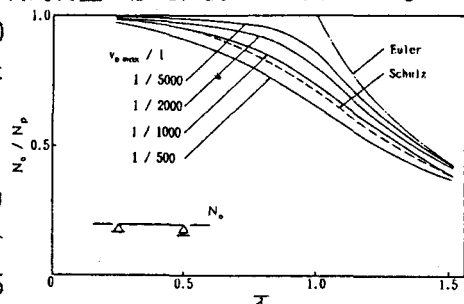


Fig. 1

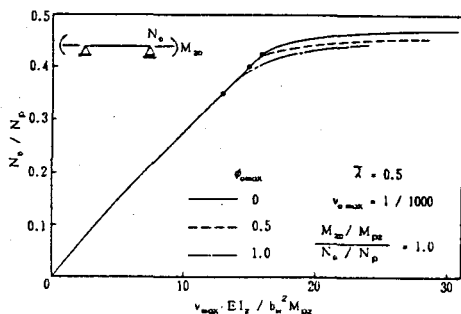


Fig. 2