

超音波法による弾性体内の空洞形状の決定について

京都大学工学部 正員 丹羽義次

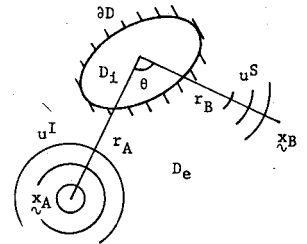
京都大学工学部 正員 廣瀬壮一

1. はじめに

弾性波の散乱に関する問題は、大別して二つに分れる。一つは、散乱物体の形状、並びに物性値が与えられた時の散乱波を求める問題 (direct scattering problem) であり、もう一つは、散乱波が与えられた時の散乱物体の形状、あるいは物性値を求める問題 (inverse scattering problem) である。前者の direct scattering problem に関しては、その解の唯一性も証明されており、今まで数多くの研究がなされてきた。それに対し、inverse scattering problem に関しては、その問題の解自身、唯一性がなく、半経験的解法を用いて解析しなければならないため、特に、弾性波の分野における研究は立ち遅れているようである。本研究は、inverse scattering problem の解析法の一つである POFFIS (physical optics farfield inverse scattering identity) 法を用いて、数値実験により弾性体内部の空洞形状を決定するものである。

2. 問題の設定

Fig. 1 に示すような空洞 D_i を有する無限弾性体 D_e (せん断剛度 μ , 密度 ρ) における 2 次元面外波動問題を考える。この時、 D_e における支配方程式、及び ∂D 上の境界条件はそれぞれ次式で与えられる。

$$\mu \nabla^2 u(x) + \rho \omega^2 u(x) = 0 \quad x \in D_e \dots (1), \quad \mu \partial n \cdot \nabla u(x) = 0 \quad x \in \partial D \dots (2)$$


ただし、 u は面外変位、 n は境界 ∂D 上の法線ベクトルであり、角 θ は Fig. 1 解析モデル周波数 ω における定常状態を仮定した。今、Fig. 1 に示すように点 x_A から円筒波 u^I を発生させ、空洞によって発生する散乱波 u^S を点 x_B において検出したとする。ただし、空洞から点 x_A , 及び x_B までの距離 r_A, r_B は、それぞれ空洞の代表長 a に比べ、十分大きいものと仮定し、点 x_A と点 x_B は、空洞に関して角度 θ をなすものとする。解くべき問題は、点 x_A における入力波 u^I と点 x_B における散乱波 u^S が既知である場合に、空洞の形状を決定するものである。

3. 定式化

3.1 散乱波の積分表現 まず、点 x_B における散乱波 $u^S(x_B)$ を積分表現すれば、次のようになる。

$$u^S(x_B) = \mu \int_{D_i} \frac{\partial^2}{\partial y_j^2} U(x_B, y) \frac{\partial^2}{\partial y_j^2} u(y) dS_y - \rho \omega^2 \int_{D_i} U(x_B, y) u(y) dS_y \quad (3)$$

ただし、 $U(x_B, y)$ は式 (1) の基本解であり、次式で与えられる。

$$U(x_B, y) = \frac{i}{4\mu} H_0^{(1)}(kr_B), \quad k = \frac{\rho \omega}{\mu}, \quad r_B = |x_B - y| \quad (4)$$

次に、式 (3) の右辺の積分に含まれる変位 u を点 x_A から発生する入射波 u^I により近似する (Born 近似)。ここでは、入射波 u^I を円筒波であると仮定しているため、次式のように表せる。

$$u(z) \approx u^I(z; x_A) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k r_A) \quad (y \in D_i) \quad , \quad r_A = |x_A - z| \quad (5)$$

式(4)と(5)を式(3)に代入し、さらに、 $r_A(r_B) \gg a$ (a は空洞の代表長)なる Farfield 近似を導入すれば、点 x_B における散乱波 $u^S(x_B)$ は次のように表わされる。

$$u^S(x_B) = -\frac{i}{4\pi} \frac{k}{\sqrt{k_A k_B}} ((\hat{x}_A \cdot \hat{x}_B) + 1) e^{ik(r_A + r_B)} \int_{D_i} e^{-ik(\hat{x}_A + \hat{x}_B) \cdot \hat{x}} dS_x \quad (6)$$

ただし、 $\hat{x}$ は単位ベクトルを表わす。

3.2 特性関数 ここで、 $\gamma(x) = 1$ ($x \in D_i$)、 $\gamma(x) = 0$ ($x \notin D_i$) で定義される特性関数 $\gamma(x)$ を導入し、この Fourier 変換を考えると、

$$\tilde{\gamma}(\tilde{x}) = \int_{D_i + D_i} \gamma(x) e^{-i\tilde{x} \cdot x} dS_x = \int_{D_i} e^{-i\tilde{x} \cdot x} dS_x \quad (7)$$

となる。式(7)の右辺の積分は、 $\tilde{x} = k(\hat{x}_A + \hat{x}_B)$ のもとで、式(6)の右辺の積分項と同値であることから、点 x_B における散乱波 $u^S(x_B)$ が既知ならば、式(6)により、 $\tilde{\gamma}(\tilde{x})$ が求められ、これを逆 Fourier 変換することにより、特性関数 $\gamma(x)$ を求めることができる。すなわち、空洞の形状を決定することができる。

4. 解析例

本研究では点 x_B における散乱波を direct scattering problem として境界積分方程式により解析し、これを式(6)の左辺に代入して特性関数 $\gamma(x)$ を決定した。ただし、ここでは空洞の形状を半径 a の円と仮定し、その半径 a を決定する一次元問題として解析した。ただし、 $ka \approx 5.0$ までの周波数を考慮し、 $r_A = r_B = 5a$ とした。Fig. 2 は、 x_A と x_B のなす角 θ をパラメータとして、特性関数 γ の半径方向の分布を示したものである。図中の破線は求められるべき特性関数の分布である。この図より、 $\theta < 90^\circ$ の範囲においては精度よく空洞の半径を推定することができるが、 $\theta > 90^\circ$ では、かなり精度が低下することがわかる。

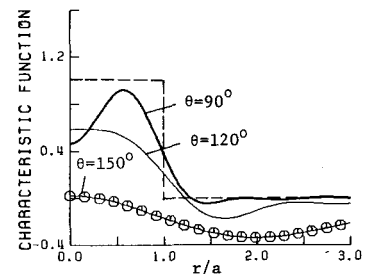
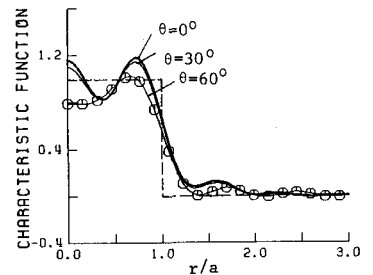


Fig. 2 特性関数の分布

5. おわりに

本報告においては、円形空洞の半径を POFFIS 法により解析したが、上述の定式化を任意形状の空洞、あるいは、inclusion の問題に拡張することは容易である。また、境界 ∂S で囲まれた有限弾性体における空洞に対しても、境界 ∂S 上の変位 $u(x_B)$ が

$$\begin{aligned} c u(x_B) + \int_{\partial S} \mu \eta_j \frac{\partial_j}{\partial y_j} U(x_B, x) u(x) dS_y - \int_{\partial S} U(x_B, x) \mu \eta_j \frac{\partial_j}{\partial y_j} u(x) dS_y - u^I(x_B; x_A) \\ = \mu \int_{D_i} \frac{\partial_j}{\partial y_j} U(x_B, x) \frac{\partial_j}{\partial y_j} u(x) dS_y - \rho \omega^2 \int_{D_i} U(x_B, x) u(x) dS_y, \quad x_B \in \partial S \end{aligned}$$

により表わされ、上式の左辺はすべて既知であると仮定すれば、本報告における解析と同様な解析が可能であることが明らかであろう。