

積分方程式法による粘弾性波動解析

大阪府

〇川上 隆

京都大学工学部

正員

小林昭一

1. はじめに

近年、弾性地盤での動的挙動を解析する際、積分方程式法がよく用いられているが、ここでは、さらに粘弾性体においても、動弾性の場合の弾性定数に対して、複素弾性定数を持ち込むことで、同様の解析が可能であることを示す。モデルとして、無限地盤円孔及び、多層地盤に粘弾性体を含む場合を考え、定常問題を対象とし、積分方程式法又は、有限要素法を併せ持つハイブリッドな手法を用いて、その適用性を示した。

2. 粘弾性問題

微小変形を仮定すると、線形粘弾性体における構成式は、次の式となる。

$$\tau_{ij}(x, t) = \int_{-\infty}^t G_{ijkl}(t-\tau) \frac{d\varepsilon_{kl}(x, \tau)}{d\tau} d\tau \quad (1.1)$$

ここで、 τ_{ij} : 応力, ε_{kl} : ひずみ, G_{ijkl} : 緩和関数テンソル

(1.1)をフーリエ変換すると

$$\hat{\tau}_{ij}(x, \omega) = \hat{G}_{ijkl}^*(\omega) \hat{\varepsilon}_{kl}(x, \omega) \quad (1.2)$$

ここで、 $\hat{G}_{ijkl}^*(\omega)$: 複素緩和テンソル ($= i\omega \hat{G}_{ijkl}(\omega)$), “*” は、複素型であることを示し、“^” は、フーリエ変換された関数を示す。さらに、動弾性の運動方程式をフーリエ変換すると

$$\mu^*(\omega) \hat{u}_{i,jj} + (\lambda^*(\omega) + \mu^*(\omega)) \hat{u}_{j,ji} + \rho \omega^2 \hat{u}_i = 0 \quad (1.3)$$

定常状態の変位は、次の式で表わされる。これをフーリエ変換して(1.3)に代入すると(1.5)を得る。

$$u = \underline{a} e^{i(\underline{k} \cdot \underline{x} - \omega t)} \quad (1.4)$$

$$(\lambda^* + \mu^*)(\underline{a} \cdot \underline{k}) \underline{k} + (\mu^* \underline{k} \cdot \underline{k} - \rho \omega^2) \underline{a} = 0 \quad (1.5)$$

よって、 $\lambda^* + \mu^* \neq 0$ を仮定すると次の2つの波に分けることができる。(i)は、P波, (ii)は、S波に相当する。

$$(i) \underline{a} = A \underline{k} \quad |\underline{k}|^2 = \frac{\rho}{\lambda^* + 2\mu^*} \omega^2 \quad (1.6)$$

$$(ii) \underline{k} \cdot \underline{a} = 0 \quad |\underline{k}|^2 = \frac{\rho}{\mu^*} \omega^2 \quad (1.7)$$

(i), (ii)より、 ω を実数にとると、 $\underline{k}$ は、複素数であり、 $\underline{k}^* = \underline{k}_0 + i \underline{k}_1$ とおくことができる。これを(1.4)に代入する。

$$u = \underline{a}^* e^{-\underline{k}_1 \cdot \underline{x}} e^{i(\underline{k}_0 \cdot \underline{x} - \omega t)} \quad (1.8)$$

式の虚部が粘性を示し、 $e^{-\underline{k}_1 \cdot \underline{x}}$ は、距離減衰を表す。 λ^*, μ^* は、 $\alpha = |\underline{k}_0|/|\underline{k}_1|$ を与えることにより、決定できる複素弾性定数である。よって、(1.3)を積分方程式法、有限要素法を用いて数値解析することになる。

Takashi KAWAKAMI

Shoichi KOBAYASHI

3. 積分方程式法

Fig.1において ∂D 上の変位、表面力に対し、次式が成立つ。

$$\frac{1}{2} u_R(x) = \int_{\partial D} \{ \Gamma_i^{(R)}(x, y) t_i(y) - u_i(y) \Gamma_{i,1}^{(R)}(x, y) \} d\Omega_y \quad (3.1)$$

$$\Gamma_i^{(R)}(x, y) = \frac{i}{4\mu^*} \left[H_0^{(1)}(k_r^* r) \delta_{ij} - \frac{1}{k_r^2} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} \{ H_0^{(1)}(k_r^* r) - H_0^{(1)}(k_s^* r) \} \right] \quad (3.2)$$

ここで、 $\Gamma_i^{(R)}(x, y)$ は、 $\Gamma_i^{(R)}(x, y)$ を法線微分したもので、 $H_0^{(1)}$ ：第1種の2次の Hankel 関数、 $r = |x - y|$ 、 k_r^* 、 k_s^* ：P, S波の複素型の波数

4. 有限要素法

($D_i + \partial D$)上の変位、表面力に対し、次式が成立つ。

$$-\int_{\partial D} N_i^a \bar{t}_{ij,kl} N_j^b u_k^b ds + \int_{\partial D} N_i^a t_j dc + p\omega^2 \int_{\partial D} N_i^a N_j^b u_j^b ds = 0 \quad (4.1)$$

ここで、 N ：形状関数

3, 4より、弾性定数を複素弾性定数に換えることで、それぞれ定式化し、数値解析することができ。

5. 適用例

(1) Fig. 2の無限地盤にある円孔にSH波が入射した場合、その外部問題を、散乱波に対して積分方程式をもち、連立方程式を解くことで、境界上の変位、周辺応力の応答解析をおこなう。その結果を Fig. 3に示す。

(2) Fig. 4の半無限地盤に粘性をもつ弱層が存在する場合、領域 D_b ：弾性…SV波を入射させ、散乱波に対して積分方程式を用いる。
領域 D_e ：粘性($\alpha=0.05$)…積分方程式を用いる(内部問題)。
領域 D_i ：粘性($\alpha=0.05$)…有限要素法を用いる(内部問題)。(5.1)

境界条件は、地盤表面での表面力が0、 D_i と D_e 、 D_e と D_b との境界において、変位の連続、表面力の釣り合いを仮定する。精度CHECKは、 D_i 、 D_e 、 D_b において同じ弾性定数を用い、散乱波をばねなし条件で、弾性と粘性について表面の変位応答を調べ、確かめ。Fig. 5, Fig. 6は、実際のモデルを想定して、(5.1)の条件で応答解析をおこなった。

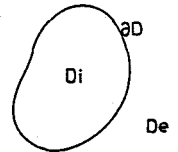


Fig. 1

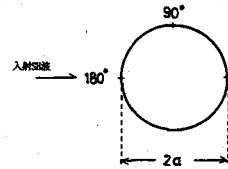


Fig. 2

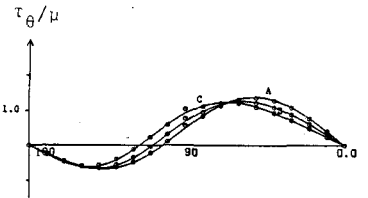
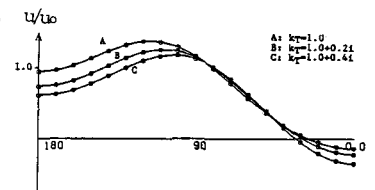


Fig. 3 : 実線は正解を、"..."は計算値を示し、正解はPaoの理論解を用いている。

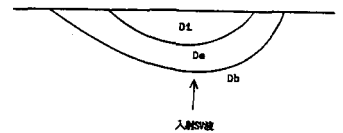


Fig. 4



Fig. 5



Fig. 6