

積分方程式法による非均質異方弾性体の動的解析

京都大学工学部 正員 丹羽義次
 京都大学工学部 正員 廣瀬壮一
 建設省 正員 ○茅野牧夫

1. はじめに

近年、積分方程式法による動弾性問題の分野での研究が注目されてきている。これは積分方程式法が、有限要素法や差分法などの領域型解析法に比べ、地震学や耐震工学上の問題である無限あるいは、半無限領域を含む問題により適しているためである。しかしながら、今まで積分方程式法によって解析された問題のほとんどは、均質等方弾性体を取り扱ったもので、非均質異方弾性体に対して積分方程式法が適用された例は見当たらない。本研究は、非均質異方弾性体の動的解析を積分方程式法を用いて行うものであり、複雑な地質構造を持つ地盤の動的特性を解明するための基礎的研究として有意義であると考えられる。

2. 解析モデルと基礎式

解析モデルとして、非均質異方線形弾性体から成る内部領域 D を含む均質等方線形弾性体（外部領域 D_0 ）を取り扱う。（図1参照）ここで非均質というのは、Hookeの弾性定数 C_{ijkl} および密度 ρ が場所の関数であることを意味する。このようなモデルに面内平面波が入射したときの任意の点の変位を求める。なお、ここでは平面ひずみ状態を仮定した2次元問題を解析する。

以上のことにより、内部領域 D の支配方程式は次のようになる。……(1)

$$\{C_{ijkl} r(x) u_{k,r}(x)\}_{,j} + \rho(x) b_{\alpha}(x) + \rho(x) \omega^2 u_{\alpha}(x) = 0, \\ \{C_{ijkl} r(x) u_{k,r}(x)\}_{,j} + \rho(x) b_{\beta}(x) + \rho(x) \omega^2 u_{\beta}(x) = 0$$

ここに、 u_{α}, u_{β} は変位ベクトル、 b_{α}, b_{β} は物体力ベクトル、 ω は角周波数であり、 i は座標 x_i に関する微分を表わす。なお、ローマン文字の指標は 1, 2, 3 をとり、ギリシア文字の指標は 1, 2 をとるものとする。

境界条件は、外部領域と内部領域の境界 ∂D で変位ベクトル、応力ベクトルが一致するものとする。さらに、外部領域の無限遠方で散乱波が Sommerfeld の放射条件を満足すると仮定する。

3. 積分方程式の構成

非均質異方弾性体から成る内部領域に対しては、次式を満たす2次元均質等方弾性体の静弾性問題における基本解を用いて積分方程式を構成する。

$$\{\lambda_0 U_{p,\alpha}^2(x,y) + \mu_0 U_{\alpha,p}^2(x,y) + \mu_0 U_{p,\alpha}^2(x,y)\}_{,p} \\ = -\delta_{\alpha 2} \delta(x-y), \\ \mu_0 U_{3,\beta\beta}^3(x,y) = -\delta(x-y) \quad \dots\dots (2)$$

ここに、 $U_{\alpha}^2, U_{\beta}^3$ はそれぞれ、面内問題、面外問題に対する基本解であり、 $\delta_{\alpha 2}$ は、Kronecker のデルタ、 $\delta(x-y)$ は Dirac のデルタ関数である。この均質等方弾性体に対する基本解は陽に求めることができ、次のように表わされる。

$$U_{\alpha}^2(x,y) = \frac{1}{4\pi\mu_0(\lambda_0+2\mu_0)} \{(\lambda_0+3\mu_0)\delta_{\alpha 2} \ln \frac{1}{r} \\ + (\lambda_0+\mu_0)r_{,\alpha}r_{,\beta}\}, \\ U_{\beta}^3(x,y) = \frac{1}{2\pi\mu_0} \ln \frac{1}{r}, \quad r=|x-y| \quad \dots\dots (3)$$

この基本解 $U_{\alpha}^2, U_{\beta}^3$ をそれぞれ式(1)に掛け、変位 u_{α}, u_{β} をそれぞれ式(2)に掛け、両辺を差し引き、領域 D における領域積

分を行い、Gaussの発散定理を用いた後、極限操作を行うなどして次の積分表示を得る。

$$\begin{aligned} & \int_{\partial D} \{U_\alpha^2(x, y) t_2(y) - T_\alpha^R(x, y) u_R(y)\} dS_y \\ & + \int_D \{U_\alpha^{2,\beta}(x, y) C_{\beta\alpha R}(y)\}^T u_R(y) dV_y \\ & + \int_D U_\alpha^2(x, y) \rho(y) \omega^2 u_R(y) dV_y \\ & = \begin{cases} U_{\alpha\beta\gamma} C_{\beta\alpha R}(x) u_R(x), & x \in D \\ \frac{1}{2} U_{\alpha\beta\gamma} C_{\beta\alpha R}(x) u_R(x), & x \in \partial D \\ 0, & x \in D_0. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{\partial D} \{U_\alpha^3(x, y) t_3(y) - T_\alpha^R(x, y) u_R(y)\} dS_y \\ & + \int_D \{U_\alpha^{3,\beta}(x, y) C_{\beta\alpha R}(y)\}^T u_R(y) dV_y \\ & + \int_D U_\alpha^3(x, y) \rho(y) \omega^2 u_R(y) dV_y \\ & = \begin{cases} \frac{1}{2\mu_0} C_{\beta\alpha R}(x) u_R(x), & x \in D \\ \frac{1}{4\mu_0} C_{\beta\alpha R}(x) u_R(x), & x \in \partial D \\ 0, & x \in D_0. \end{cases} \quad \dots (4) \end{aligned}$$

なお、物体力は無視した。また、 t_α, t_β は応力ベクトルであり、 $T_\alpha^R, T_\beta^R, U_{\alpha\beta\gamma}$ は以下のように定義される。

$$\begin{aligned} T_\alpha^R(x, y) &= n_r(y) C_{\beta\alpha R}(y) U_\alpha^{2,\beta}(x, y), \\ T_\beta^R(x, y) &= n_r(y) C_{\beta\alpha R}(y) U_\beta^{3,\beta}(x, y), \\ U_{\alpha\beta\gamma} &= \{(3\lambda_0 + 7\mu_0) \delta_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\gamma} \\ & - (\lambda_0 + \mu_0)(\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\gamma} + \delta_{\beta\gamma} \delta_{\alpha\gamma}) / 8\mu_0(\lambda_0 + 2\mu_0)\} \end{aligned}$$

均質等方弾性体から成る外部領域に対しても、動弾性問題の基本解を用いることにより同様の積分表示が得られ、境界条件により式(4)と結合し、数値的に離散化することにより、必要な変位が求まる。

4. 数値解析例

数値解析モデルとして、内部領域の形状を半径 a の円とした。内部領域が均質等方弾性体の場合、動弾性問題の基本解を用いて積分方程式を得ることができ、本研究で用いた手法と比較したのが図2である。これによると両手法の結果はよく一致していることがわかる。

次に本研究の解析結果の1例を示したのが図3である。なお、図中の aR_T^0 は半径 a を掛けて無次元化した外部領域における横波の波数であり、 T は横波が半径を伝わる時間で無次元化した時間である。たとえば、 $aR_T^0 = \pi/2$ のとき、 $T=4$ で1周期となる。

他に、物質定数、入射角等を変えて解析を行ったが、詳細は発表の当日に報告する。

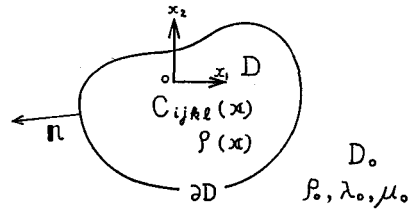


図1 解析モデル

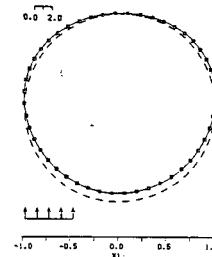


図2 均質等方弾性体の変位応答図
(調和平面P波垂直入射)

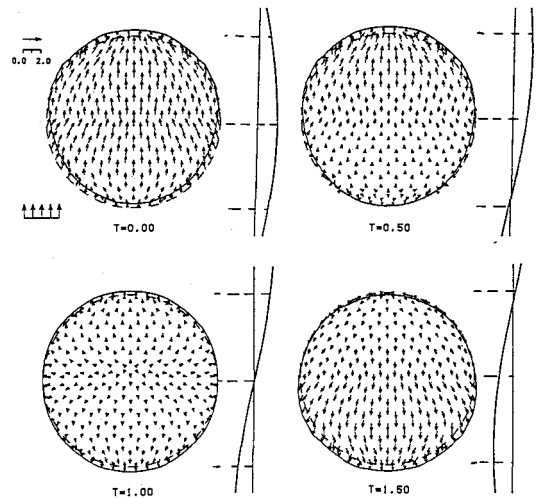


図3 均質異方弾性体の変位応答図
(調和平面P波垂直入射, $aR_T^0 = \pi/2, \rho/\rho_0 = 1.0, C_{11}/\mu_0 = 1.5, C_{12}/\mu_0 = 0.5, C_{22}/\mu_0 = 4.5$)