積分方程式法による3次元動弾性解析

小野田セメント　　　　　○石原洋二
京都大学工学部　正　員　　小林昭一

1. まえがき

本研究は、3次元の定常状態での動弾性問題を積分方程式法によって解析したものであり、一重層ポテンシャル，二重層ポテンシャルの核を級数展開し，ケタ落ちを回避したところと，二重層ポテンシャルの核の計算を制約条件を使い間接的に求めたところに，その特色がある。

2. 基礎理論

等方均質な弾性体の定常状態における基礎方程式は次の式で与えられる。

$$\mu u_{i,kk} + (\lambda+\mu) u_{j,ji} + \rho\omega^2 u_i = -f_i \qquad (1)$$

ここで，λ, μ: Lamé 定数，u_i: 変位，ρ: 密度，ω: 円振動数，f_i: 物体力　を意味する。

上の支配方程式が領域$(D+\partial D)$で成立するとすると、その解は、積分表示を用いると次のようにあらわすことができる。（ただし，$f_i=0$ の場合を考える）

$$D_{ik}(\underset{\sim}{x}) = \int_{\partial D} \{ \Gamma_i^{(k)}(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y}, \omega) t_i(\underset{\sim}{y}) - \Sigma_i^{(k)}(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y}, \omega) u_i(\underset{\sim}{y}) \} dS_y \qquad (2)$$

$$D_{ik}(\underset{\sim}{x}) = \begin{cases} 1 & \underset{\sim}{x} \in D \\ 0 & \underset{\sim}{x} \notin D+\partial D \\ \frac{1}{2}\delta_{ik} & \underset{\sim}{x} \in \partial D \end{cases}$$（境界∂Dはなめらかであると仮定する）

$t_i(\underset{\sim}{y})$：表面力

$$\Gamma_i^{(k)} = \frac{k_T}{4\pi\mu} [a_{u1}\delta_{ik} - a_{u2} r_{,i} r_{,k}] \qquad (3)$$

$$a_{u1} = (r_T^{-1} + i r_T^{-2} - r_T^{-3}) e^{ik_T r} - (i r_L^{-2} - r_L^{-3}) e^{ik_L r} (k_L/k_T)^3$$

$$a_{u2} = (r_T^{-1} + 3i r_T^{-2} - 3 r_T^{-3}) e^{ik_T r} - (r_L^{-1} + 3i r_L^{-2} - 3 r_L^{-3}) e^{ik_L r} (k_L/k_T)^3$$

$$\Sigma_i^{(k)} = [\{(a_{t1} - a_{t2})\delta_{ik} - 2(a_{t3} - 2a_{t2}) r_{,i} r_{,k}\} r_{,j} n_j$$
$$- \{\tfrac{\lambda}{\mu}(a_{t3} - a_{t1}) + 2(\tfrac{\lambda}{\mu} + 1) a_{t2}\} r_{,k} n_i$$
$$- (a_{t2} - a_{t1}) r_{,i} n_k] k_T^2/4\pi \qquad (4)$$

$$a_{t1} = (i r_T^{-1} - 2 r_T^{-2} - 3i r_T^{-3} + 3 r_T^{-4}) e^{ik_T r} - (-r_L^{-2} - 3i r_L^{-3} + 3 r_L^{-4}) e^{ik_L r} (k_L/k_T)^4$$

$$a_{t2} = (r_T^{-2} + 3i r_T^{-3} - 3 r_T^{-4}) e^{ik_T r} - (r_L^{-2} + 3i r_L^{-3} - 3 r_L^{-4}) e^{ik_L r} (k_L/k_T)^4$$

$$a_{t3} = (i r_T^{-1} - 4 r_T^{-2} - 9i r_T^{-3} + 9 r_T^{-4}) e^{ik_T r} - (i r_L^{-1} - 4 r_L^{-2} - 9i r_L^{-3} + 9 r_L^{-4}) e^{ik_L r} (k_L/k_T)^4$$

ただし，$r = |\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{y}|$，$k_T = \omega/\sqrt{\{\mu/\rho\}}$，$k_L = \omega/\sqrt{\{(\lambda+2\mu)/\rho\}}$，$r_T = k_T r$，$r_L = k_L r$　である。

3. ケタ落ち対策

一重層，二重層の核をそれぞれ級数展開して整理すると，それぞれ次の様になる。

$$\Gamma_i^{(k)} = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r} [3 - 4\nu\delta_{ik} + r_{,i} r_{,j}] + (\text{正則項}) \qquad (5)$$

$$\text{正則項} = [\psi\delta_{ki} - \chi r_{,i} r_{,k}] / 4\pi\mu$$

Shoichi KOBAYASHI , Yoji ISHIHARA

$$\Sigma_i^{(k)} = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)r^2}\left[\{(1-2\nu)\delta_{ki} + 3r_{,i}r_{,k}\}r_{,j}n_j - (1-2\nu)(r_{,k}n_i - r_{,i}n_k)\right] + (\text{正則項}) \tag{6}$$

$$\text{正則項} = [\{(\psi' - \chi/r)\delta_{ki} + 2(2\chi/r - \chi')r_{,i}r_{,k}\}r_{,j}n_j$$
$$-\{\tfrac{\lambda}{\mu}(\chi' - \psi') + 2(\tfrac{\lambda}{\mu}+1)\chi/r\}r_{,k}n_i - (\chi/r - \psi')r_{,i}n_k]/4\pi$$

ただし，ν：ポアソン比，$\chi' = \partial\chi/\partial r$，$\psi' = \partial\psi/\partial r$

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(ik_T)^n}{n!}\frac{r^{n-1}}{n+2}\left\{n+1+\left(\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\right)^{\frac{n}{2}+1}\right\}$$
$$\chi = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(ik_T)^n}{n!}\frac{n-1}{n+2}r^{n-1}\left\{1-\left(\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\right)^{\frac{n}{2}+1}\right\}$$ である

式(3),(4),(5),(6)からわかるように，$\Gamma_i^{(k)}$，$\Sigma_i^{(k)}$の実際の特異性は，$O(1/r)$，$O(1/r^2)$であるにもかかわらず，見掛け上，それぞれ，$O(1/r^3)$，$O(1/r^4)$の項を含む。すなわち$k_T r$，$k_L r$が小さい場合，式(3),(4)の表現式ではケタ落ちが生じる危険がある。そこで実際の計算では，$k_T r$，$k_L r$が大きい場合には，式(3),(4)，小さい場合には，式(5),(6)を用いることにした。

4. 積分の評価

式(5),(6)からわかるように，$\Gamma_i^{(k)}$，$\Sigma_i^{(k)}$はそれぞれ次の様に表わせる。

$$\Gamma_i^{(k)} = U_i^{(k)} + (\text{正則項}) \qquad \Sigma_i^{(k)} = T_i^{(k)} + (\text{正則項})$$

ただし，$U_i^{(k)}$，$T_i^{(k)}$はそれぞれ静弾性問題における一重層ポテンシャル，二重層ポテンシャルの核である。

等方均質な弾性体の，物体力＝0，における静弾性問題の基礎方程式及び，境界∂Dでの積分表示は次の様に示される。

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda+\mu)u_{j,ji} = 0 \tag{7}$$
$$\frac{1}{2}\delta_{ik}u_i(x) = \int_{\partial D}\{U_i^{(k)}(x,y)t_i(y) - T_i^{(k)}(x,y)u_i(y)\}dS_y \tag{8}$$

ここで，$u_i = 1$は式(7)を満たすので，式(8)に代入することができ，次の式が得られる。

$$\frac{1}{2}\delta_{ik} = -\int_{\partial D}T_i^{(k)}(x,y)\,dS_y \tag{9}$$

今，ΔSを積分計算が発散するおそれのある部分，S_cを残りの部分とすると，式(9)は，次の様に変形できる。

$$\int_{\Delta S}T_i^{(k)}(x,y)\,dS_y = -\frac{1}{2}\delta_{ik} - \int_{S_c}T_i^{(k)}(x,y)\,dS_y \tag{10}$$

従って，式(10)の右辺を計算することによって，式(10)の左辺の評価は可能となる訳である。その値と，正則項の部分を積分した値とを加えることにより，動弾性の二重層ポテンシャルの核の計算を行なった。

5. モデル及び計算例

モデルは，Fig.1に示すような単位球である。計算例としては，内部領域と外部領域の媒質が同じときに，S波，$u_3 = e^{ik_T x_2}$が入射したときの変位の結果をFig.2に示す。"●","○"が計算結果で，——が正解である。

詳細については，当日発表する予定である。

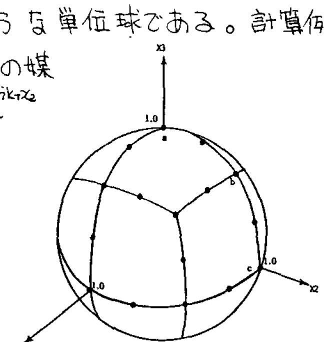

Fig.1

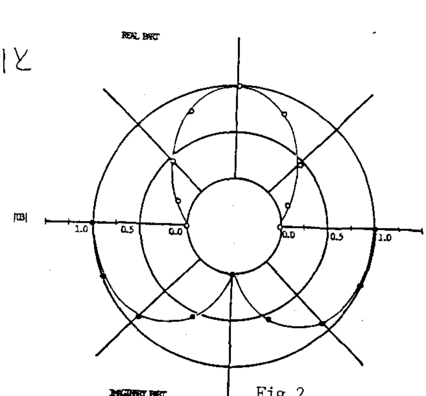

Fig.2