

境界要素法による板の座屈解析について

京都大学工学部 正員 丹羽義次
 京都大学工学部 正員 渡辺英一
 京都大学工学部 正員 廣瀬壮一
 京都大学大学院 学生員 〇杉原直樹

1. はじめに

板の座屈荷重算定の主な手法は級数展開を用いた古典的なものであろう。しかし、この方法では境界条件が複雑になれば厳密な解が得られない場合が多いので、より一般的に座屈荷重を算定する方法が必要とされてきた。近年、有限要素法により数値的に座屈荷重を求める方法が確立された。しかし、有限要素法も、問題の次元数が増加するにつれて入力データが膨大になってゆくこと、計算精度を向上させようとするれば最終的に解くべき方程式の元数がきわめて大きくなって計算時間がかかることなどの欠点が明らかになってきた。この欠点を補う方法として最近注目されているのが境界要素法である。

本研究の目的は、境界要素法を用いて基本的な板の座屈問題の数値解析を行ない、座屈問題への境界要素法の適用性を検討することにある。

2. 境界要素法による定式化

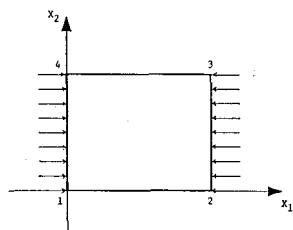


Fig.1 一方向一様圧縮力を受ける板

本研究では、Fig.1に示すような一方向に一様な圧縮力を受ける薄い矩形板の座屈荷重を算定する。一方向に一様な圧縮力を受ける薄板の線形理論に基づく座屈の支配方程式は次式で表わされる。

$$\mathbb{L}u = (\Delta - \alpha_1^2 \partial_1^2)u = 0 \quad (2-1)$$

$$\text{ここに、} \Delta = \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4}$$

$$\alpha_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \alpha_1^2 = |N_x|/D$$

D: 単位幅当たりの板の曲げ剛度

N_x : 単位長さ当たりの圧縮力

また、基本解 $U(x, Y)$ は次のようになる。

$$U(x, Y) = (i/4\alpha_1) \int_0^Y \sin(\alpha_1 x/2) H_0^{(1)}(\alpha_1 \sqrt{x^2 + Y^2}/2) dx_1 \\ + (i/16) \int_0^{M/2} [2x_2 H_0^{(1)}(\alpha_1 x_2/2) + \pi x_2 \{ H_0^{(1)}(\alpha_1 x_2/2) H_1^{(1)}(\alpha_1 x_2/2) \\ - H_1^{(1)}(\alpha_1 x_2/2) H_0^{(1)}(\alpha_1 x_2/2) \}] dx_2$$

ここに、 $H_m^{(1)}$: m 次の第1種ハンケル関数

H_m : m 次のストルヴ関数

$$Y_i = X_i - Y_i$$

ここで、 $\int_0^Y U \mathbb{L}u dA - \int_0^Y u \mathbb{L}U dA$ なる式を考える。ただし D は領域、 dA は領域の微小面積を表わす。この式にガウスの発散定理を用い、境界への極限操作を行ない、さらに矩形板であることを利用すると次の境界積分方程式を得る。

$$\begin{aligned}
 (1/2)u(x) &= [S(V_n u)](x) - [D(M_n u)](x) + [M(\partial_n u)](x) \\
 &\quad - [V(u)](x) + \sum_{\partial_{24}} \left\{ [U(x, y)] \{ \partial_n u(y) \} - \{ \partial_n U(x, y) \} u(y) \right\} dS_y \\
 &\quad \dots (2-2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (1/2)(\partial_n u)(x) &= [\partial_n S(V_n u)](x) - [\partial_n D(M_n u)](x) \\
 &\quad + [\partial_n M(\partial_n u)](x) - \lim_{x \rightarrow x} [\partial_n S V(u)](x) \\
 &\quad + \sum_{\partial_{24}} \left\{ [\partial_n U(x, y)] \{ \partial_n u(y) \} - \{ \partial_n \partial_n U(x, y) \} u(y) \right\} dS_y \\
 &\quad \dots (2-3)
 \end{aligned}$$

ここに、 $(S\mu_0)(x) = \int_{\partial_0} U(x, y) \mu_0(y) dS_y$
 $(D\mu_1)(x) = \int_{\partial_0} U(x, y) \mu_1(y) dS_y$
 $(M\mu_2)(x) = \int_{\partial_0} \{ M_{ny} U(x, y) \} \mu_2(y) dS_y$
 $(V\mu_3)(x) = \int_{\partial_0} \{ V_{ny} U(x, y) \} \mu_3(y) dS_y$
 $Tr M_n(\cdot) = Tr [\Delta(\cdot) - (1-\nu) \partial_s^2(\cdot)]$
 $Tr V_n(\cdot) = Tr \partial_n \Delta(\cdot) + (1-\nu) \partial_s Tr (\partial_n \partial_s(\cdot))$
 $Tr = \lim_{x \rightarrow x} \quad x \in \partial D, \quad x \in D$
 ∂D は領域の境界を表わし、 ∂D_{24} は(2-3)辺、
(4-1)辺を表わす。また、 ∂_n は法線方向微分、
 ∂_s は接線方向微分、 ν はポアソン比を表わ
す。 ∂_{ny} 等、微分演算子に x, y 等の添字のつ
いているものは、その点においての演算を
意味する。

また、基本的な境界条件としては次の3
種類が考えられる。

1) 固定支持条件

$$Tr u(x) = Tr \partial_n u(x) = 0 \quad x \in \partial D$$

2) 単純支持条件

$$Tr u(x) = Tr (M_n(u(x))) = 0 \quad x \in \partial D$$

3) 自由支持条件

$$Tr (M_n(u(x))) = Tr (V_n(u(x))) = 0 \quad x \in \partial D$$

さらに、これらの組み合わせとして混合支持
条件が考えられる。

3. 数値解析例

(2-2), (2-3)式を一定要素を用いて離散化
する。数値解析の方法としては、荷重パラ

メータ $\bar{c}_j$ を少しずつ変化させ、境界積分方
程式系の係数行列の複素行列式を計算し、
行列式を0とする荷重をもつ座屈荷重と
みなす。数値解析のとき注意することは、
係数行列の各要素を求める場合、数値的に
評価しなければならないが、そのとき、
field pointとsource pointが一致するところ
では級数展開によって解析的に評価し、一
致しないところではガウスの数値積分を行
なう。

全辺固定支持条件(Fig.2)の場合の結果を
Table.1に示す。表において、 $\bar{c}_j$ は文献1)の
P.387のTable 9-15の値に基づいて計算され
た理論解であり、 $\bar{c}_j$ は今回求めた数値解析
による解である。第3欄には誤差の百分率
が書かれている。

今回の計算は1辺4分割で行な、たが、
それだけの分割数でもかなり精度の良い結
果が得られた。

Table.1 全辺固定支持条件の座屈荷重

a/b	0.75	1.0	1.25
$\bar{c}_j$	10.74	9.96	9.55
$\bar{c}_j$	10.76	9.91	9.36
$ \bar{c}_j - \bar{c}_j / \bar{c}_j$ (%)	0.19	0.50	1.99

(N=16, $\Delta\zeta=0.01$)

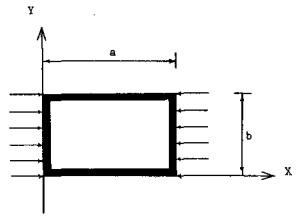


Fig.2 全辺固定支持条件の板

参考文献

- 1) Timoshenko, S.P. and J.M. Gere; Theory of Elastic Stability, 2nd Edition, McGraw-Hill, 1961.
- 2) Kitahara, M.; Applications of Boundary Integral Equation Methods to Eigenvalue Problems of Elastodynamics and Thin Plates, Unpublished, Doctor's Thesis, Kyoto University, 1984.