

剛塑性有限要素法の地盤構造物への適用

京都大学工学部 正 員 小 林 昭 一

京都大学工学部 正 員 田 村 武

日立製作所 正 員 ○清 水 章 裕

1. 概 説

塑性論の上界定理に有限要素法の手法を適用して崩壊荷重の近似値を求めようとする数値計算法が「剛塑性有限要素法」である。すでに金属の塑性加工分野では加工荷重を求める方法として注目されている。解析対象として地盤材料を選び、地盤構造の極限解析への適用を試みた解析例（文献1., 2.）があるが、本研究は、従来まで考慮されなかった内部摩擦角を導入することによって、現実の土質材料により即した解析を可能とすることを主眼とした。降伏条件の σ_0 が等方圧 σ_m に依存するという内部摩擦角を表現する一方、塑性ポテンシャルと降伏関数が一致しない Non-Associated Flow Rule に従っているのが本手法の特色である。

2. 解析方法

i) 基礎理論

表面力 T_i 、物体力 X_i 、速度場 $\dot{u}_i$ としたとき、(2)を満たす任意の運動学的許容な速度場 $\dot{u}_i$ に対し、(3)で定義される $\bar{P}$ を考える。ここで $D(\dot{\epsilon}_{ij})$ は塑性ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{ij}$ が与えられたとき、それと normality rule を満たす応力 σ_{ij} との積で定義される $\dot{\epsilon}_{ij}$ の一個関数であり、消散エネルギー率と呼ばれる。破壊時の真の荷重強度を P^* 、応力を σ_{ij}^* とすると仮想仕事の原理より(4)が成立する。(3)、(4)および(5)の最大塑性仕事の原理より(6)が成り立つ。すなわち荷重強度は真の荷重強度を下回ることがない。これを上界定理という。 $D(\dot{\epsilon}_{ij})$ の $\dot{\epsilon}_{ij}$ に対する一個性、および(1)の変位-ひずみ関係式を考慮すると、(3)におけるを最小にする速度場 $\dot{u}_i$ を求めることが真の崩壊機構と荷重強度を求めることになる。

ii) 有限要素法による定式化

(A)のような問題を設定する。(9)は体積ひずみが変化しない降伏関数を用いるために必要な条件、(8)は(3)の左辺を単位の大きさにする条件でこれによって(7)の値がただちに $\bar{P}$ の値になる。偏差応力を S_{ij} とすると塑性ポテンシャル g 、降伏関数 f はそれぞれ(10)、(11)で表される。normality ruleより(12)が成り立つ。(13)で定義される相当塑性ひずみ速度により偏差応力は(14)となる。Non-Associated Flow Rule による破壊面と破壊線の関係は図1のようになり、平面ひずみ状態であることを考慮すると σ_0 は(15)で表される。以上より(A)は(B)と等価なものであるといえる。ここでは

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) \quad (1)$$

$$\int X_i \dot{u}_i dV + \int T_i \dot{u}_i ds > 0 \quad (2)$$

$$\bar{P} \left[\int X_i \dot{u}_i dV + \int T_i \dot{u}_i ds \right] = \int D(\dot{\epsilon}_{ij}) dV = \int \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV \quad (3)$$

$$P^* \left[\int X_i \dot{u}_i dV + \int T_i \dot{u}_i ds \right] = \int \sigma_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij} dV \quad (4)$$

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \geq 0 \quad (5)$$

$$P^* \leq \bar{P} \quad (6)$$

$$D(\dot{\epsilon}_{ij}) dV \rightarrow \min \quad (7)$$

$$[A] \text{ Sub. to } \left\{ \int X_i \dot{u}_i dV + \int T_i \dot{u}_i ds = 1 \quad (8) \right.$$

$$\left. \dot{\epsilon}_{ii} = 0 \quad (9) \right.$$

$$g = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} \quad (10)$$

$$f = \frac{1}{2} (S_{ij} S_{ij} - \sigma_0^2) \quad (11)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} = \lambda S_{ij} \quad (12)$$

$$\bar{\epsilon} = \sqrt{\dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}} \quad (13)$$

$$S_{ij} = \frac{\sigma_0}{\bar{\epsilon}} \dot{\epsilon}_{ij} \quad (14)$$

$$\sigma_0 = \sqrt{2} \tan \phi \sigma_m + \sqrt{2} C \quad (15)$$

$$(\sigma_0 \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon} dV) \dot{u}_i + L^T \lambda - \mu F = 0 \quad (16)$$

$$[B] \quad F^T \dot{u} = 1 \quad (17)$$

$$L^T \dot{u} = 0 \quad (18)$$

Bマトリックス、Qは工学ひずみからテンソルひずみへの変換行列、Lは変位から体積への変換行列、Fは外力ベクトルであり、(16)を釣り合い式とみれば、 λ 、 μ はそれぞれ不定圧、荷重強度とみなすことができる。これで解くべき連立方程式が得られたが、(16)式において第1項は $\dot{\epsilon}$ に関して非線形となっている。そこで微小量 $\dot{\epsilon}$ を導入し $\dot{\epsilon}$ についての線形方程式とし、Newton-Raphson法による逐次計算を行なって収束値としての $\dot{\epsilon}$ を求める。

3. 計算結果

i) 応力円と破壊円

解析により得られた主応力によりモールの応力円を描く
と粘着力と内部摩擦角に対応した破壊円を描くことができ
る(図-2)。ここで破壊線が応力円の頂部を連ねた線で
表されるのは各要素ごとに固有な σ_c で破壊が生じるからで
ある。C、 ϕ に正確に対応した結果が得られている。

ii) 半無限体への平らな剛体ボンチの押し込み問題

比較する解析結果として内部摩擦角を考慮した剛体ボン
チ問題をとりあげた。(文献3。)ただしこれは Assoc-
iated Flow Rule に基づいているので本手法に対応するよ
うに(19)で与えられる係数を乗じて比較した。それを
まとめたのが Table 1 である。ここで CHEN の関は文
献3.における荷重強度、補正値の関はそれらに係数を乗
じたものである。図-3、図-4はそれぞれ主応力方向と
その大きさ、および変位速度を図示したものである。

Table 1

ϕ	CHEN	μ	係 数	補正値	比
0°	5.140	5.36	1.00	5.140	1.04
10°	8.347	9.00	1.02	8.514	1.06
20°	14.84	19.3	1.10	16.32	1.18
25°	20.73	33.4	1.19	24.67	1.35

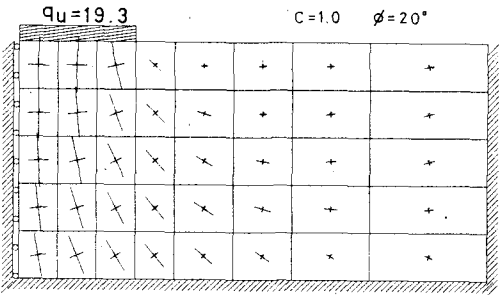


図-3

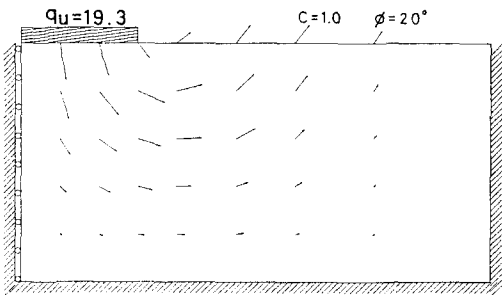


図-4

(参考文献)

1. 角 哲也; "剛塑性有限要素法による土構造物の極限解析" 京都大学 卒業論文 1983
2. 田村 武; "剛塑性有限要素法による地盤の極限解析" S.57年度科学研究補助金研究成果報告書
3. W.F.CHEN; "LIMIT ANALYSIS AND SOIL PLASTICITY" ELSEVIER SCIENTIFIC PUBLISHING Co.,1957