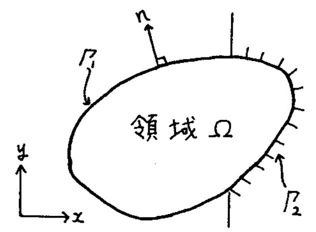
境界要素法による２次元浸透問題の解析例

京都大学工学部　正員○青木一男
京都大学工学部　正員　嘉門雅史

１．はじめに――浸透問題は従来から差分法、有限要素法等を用いて数多くの研究がなされている。このような領域型の解析法は非均質問題を容易に取入れることができる長所を持っているが、広域問題に対しては解析領域が大きくなり、節点数、要素数等の入力データの量がきわめて多くなる短所を有している。これに対し、境界要素法は境界型の解析法であり、境界のみを対象としているため入力データの数が少ないという長所を持っているが、非均質問題に対してはその取扱いが複雑になる短所を有している。そこで、本研究では、境界要素法と有限要素法のそれぞれの長所を生かした、有限要素－境界要素コンビネーション法を浸透問題に適用した解析例を示す。



図－１ 領域と境界

２．解析手法――定常平面２次元浸透流の基礎方程式は、式(1)のポアソン式で与えられる。

$$T\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)+f=0 \quad \text{-----(1)}$$

ここで　T：透水量係数
　　　　f：揚水量

また境界条件は次のようになる。

Γ_1上で　$\phi=\hat{\phi}$　，　Γ_2上で　$q=\hat{q}$　----- (2)

そこで簡単のために T＝１と仮定し、式(1)を有限要素法および境界要素法により定式化する。まず有限要素法ではガラーキン法を用い、試験関数、重み関数を同じ１次関数 N_i を仮定し、式(1)を離散化すると式(3)を得る。

$$\sum_i\sum_j \phi_i A_{ij}\phi_j-\sum_i\phi_i F_i-\sum_i\phi_i Q_i=0 \quad \text{-----(3)}$$

$$\left(\begin{aligned} A_{ij}&=\iint_{\Omega^e}\left(\frac{\partial\phi_i}{\partial x^2}\frac{\partial\phi_j}{\partial x^2}+\frac{\partial\phi_i}{\partial y^2}\frac{\partial\phi_j}{\partial y^2}\right)d\Omega\\ F_i&=\iint_{\Omega^e} f N_i\, d\Omega\\ Q_i&=\int_\Gamma q N_i\, d\Gamma\end{aligned}\right)$$

よって、系方程式は，$KU=F+Q$ ---(4)　となる。

また境界要素法では、ϕ，q に対し１次の試験関数 N_i を仮定し、１次線形要素を用いて式(1)を離散化すると式(5)を得る。

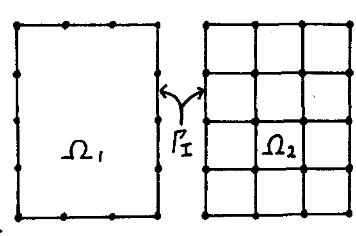
$$C_i\phi_i+\sum_j\hat{H}_{ij}\phi_j=\sum_j G_{ij}q_j+B_i \quad \text{-----(5)}$$

ここで $\hat{H}_{ij}=\int_\Gamma N_j q^* d\Gamma$，$G_{ij}=\int_\Gamma N_j\phi^* d\Gamma$，$B_i=\int_\Omega f\phi^* d\Omega$，$C_i=\frac{\theta_i}{2\pi}$，$\theta_i$：内角

$\phi^*=-\frac{\ln r}{2\pi}$，$q^*=\frac{\partial\phi^*}{\partial n}$　である。

よって、系方程式は　$HU=GQ+B$ ---- (6)　となる。

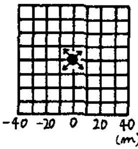
次に有限要素と境界要素とのコンビネーション法について述べる。図－２に示すように内部境界Γ_Iで接している２つの領域に対し、Ω_1に境界要素法、Ω_2に有限要素法を適用する場合を考える。２つの領域を結合するために、境界要素領域Ω_1を等価な有限要素とみなす手法を用いる。この時式(6)を有限要素



図－２ 要素の結合

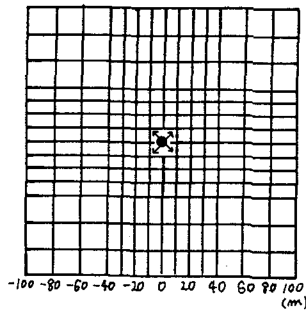
Kazuo AOKI，Masashi KAMON

的な表示に変換する必要がある。式(6)は　$KU = F + Q$ -----(7)　ここで、$K = G^{-1}H$, $F = G^{-1}B$　となる。式(4)と式(7)は同じ形式となり連立して解けるようにみえるが、ここで1つの問題が生じる。すなわち式(4)のQは要素境界をよぎる体積フラックスの次元であるのに対し、式(7)のQは節点におけるフラックスであるからである。つまり有限要素法ではポテンシャルに対し1次の試験関数を仮定しているため、そのフラックスに対して0次となっている。また境界要素法では、ポテンシャル、フラックスともに1次の試験関数を仮定していることに起因している。よってポテンシャルに対する適合条件は満たされているがフラックスに対するつり合条件が満たされない。そこで、つり合条件を満たすため、要素の半区間を考え、そこを通過する全エネルギーの連続性[1]を次式で仮定する。



図−3 モデル1

$$\int_\Gamma \phi^F q^F d\Gamma + \int_\Gamma \phi^B q^B d\Gamma = 0 \text{ ---(8)} \quad \left\{\begin{array}{l}\phi^F, q^F : \text{有限要素上} \\ \phi^B, q^B : \text{境界要素上}\end{array}\right.$$

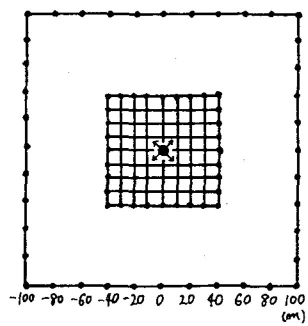


図−4 モデル2

式(8)より、つり合条件式として式(9)を得る。

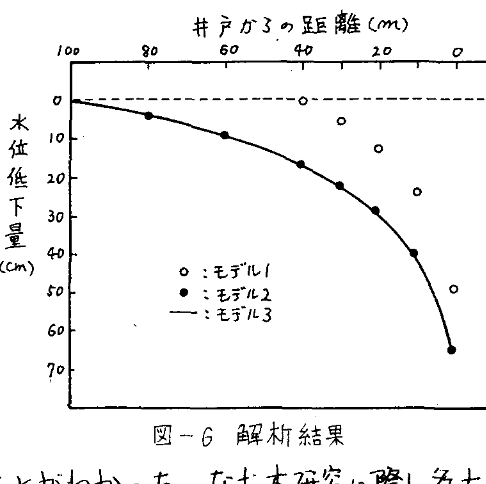
$Q^F + AQ^B = 0$ ------(9)　A：分布マトリックス

分布マトリックスAは　$A_{ij} = 1/12\, l_{j-1} + 5/12\,(l_{j-1} + l_j) + 1/12\, l_{j+1}$ で与えられる。よって、2つの領域に対し適合条件およびつり合い条件を満たした系方程式を重ね合わせ連立して解ける。



図−5 モデル3

3. 解析例——図−3〜図−5に示す解析モデルを例に取り解析した結果を図−6に示す。モデル2とモデル3は同じ領域に対し境界条件$\phi = 0$を仮定して解析したもので　両者はよく一致しコンビネーション法の妥当性が明らかになった。さて境界の取り方であるが　モデル1はモデル2より小さな領域に対し同じ境界条件で解析したもので、結果はかなり異ったものとなった。これより境界の取り方が重要な問題となってくる。この観点からコンビネーション法では、容易に十分広い領域を扱えるため、境界の取り方の問題を解決する一手法と考えられる。



図−6 解析結果

4. おわりに——本研究では、有限要素−境界要素コンビネーション法について述べてきた。その結果、この解析法の妥当性が明らかになり、浸透問題において重要な問題となる境界の取り方つまり大きな領域に対する解析が容易になることがわかった。なお本研究に際し多大な御援助をいただいた京都大学教授赤井浩一先生に深く感謝いたします。

〈参考文献〉1)加川ら：有限要素と境界要素の接合条件について，電気学会情報処理研究会，pp.31~37, 1981