

傾斜沈殿における清澄層流れのエネルギー積分による解析

大阪大学基礎工学部 正会員 芝 定孝

1. はじめに 水処理において傾斜沈殿が懸濁粒子の沈降促進に利用されて以来その日は浅くない。しかし、その粒子沈降促進の機構の解析は、ここ数十年来、殆ど進んでおらず、従って、水処理での傾斜沈殿池の設計・操作法は未だ確立されるに至っていない。ここでは、傾斜沈殿の粒子沈降促進の原動力である傾斜面直下に生成する清澄層の流れについて、運動方程式から導かれる運動エネルギー積分方程式によって理論的解析を試みた。

2. 支配方程式と境界条件 傾斜面直下の清澄層流れに対する座標系をFig.1の様に定める。座標原点を傾斜板下端に一致させ、x軸を傾斜板下面上向きに、y軸をこれと垂直下向きにとる。また、鉛直からの板の傾きを傾斜角 θ とする。支配方程式は、運動方程式、連続方程式および界面方程式である。Eg.6の Scale Factor Γ を用いて変数変換 ($\hat{u}_x = \Gamma^{1/3} u_x / v_0$, $\hat{u}_y = u_y / v_0$, $\hat{x} = x/l$, $\hat{y} = \Gamma^{1/3} y/l$) した無次元形で支配方程式を表わせば、それぞれ、Egs.1, 2, 3のようになる。た

$$\frac{\partial \hat{u}_x}{\partial \hat{y}^2} + \cos \theta = A \left(\hat{u}_x \frac{\partial \hat{u}_x}{\partial \hat{x}} + \hat{u}_y \frac{\partial \hat{u}_x}{\partial \hat{y}} \right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial \hat{u}_x}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{u}_y}{\partial \hat{y}} = 0 \quad (2)$$

$$\hat{u}_x \frac{d\hat{\delta}}{d\hat{x}} - \hat{u}_y - \sin \theta = 0 \quad (3)$$

ただし、 $\hat{u}_x$, $\hat{u}_y$ は清澄層内流速の $\hat{x}$, $\hat{y}$ 成分； $\hat{\delta}$ は清澄層厚さ； $\hat{u}_x$, $\hat{u}_y$ は界面における $\hat{u}_x$, $\hat{u}_y$ の値；Aは次の様にReynolds数 Re とScale Factor Γ とで定義される

$$A = Re \Gamma^{-1/3}, \quad Re = \frac{v_0 l}{\nu}, \quad \Gamma = 18 \cdot \left(\frac{l}{d_p} \right)^2 \phi \quad (4), (5), (6)$$

無次元数である。ただし、 v_0 は懸濁粒子群の沈降速度[cm·sec⁻¹]； l は傾斜板の長さ[cm]； d_p は懸濁粒子径[cm]； ϕ は懸濁液の体積分率濃度[-]； ν は水の動粘性係数[cm²·sec⁻¹]である。境界条件は傾斜板下端 ($\hat{x}=0$)、傾斜板下面 ($\hat{y}=0$)、清澄液と懸濁液との界面 ($\hat{y}=\hat{\delta}$) で次の様

$$\hat{x}=0 \text{ で } \hat{\delta}=0 \quad (7), \quad \hat{y}=0 \text{ で } \hat{u}_x=0, \hat{u}_y=0 \quad (8), (9), \quad \hat{y}=\hat{\delta} \text{ で } \hat{u}_x=\hat{U}_x, \frac{\partial \hat{u}_x}{\partial \hat{y}} = -k \frac{\hat{U}_x}{\hat{\delta}} \quad (10), (11)$$

に与えられる。また、 k は正の定数で、通常は近似的にゼロと置ける。水処理での傾斜沈殿では傾斜板を平行に並べる事が多い。しかし、傾斜板間距離に比して清澄層厚さは十分

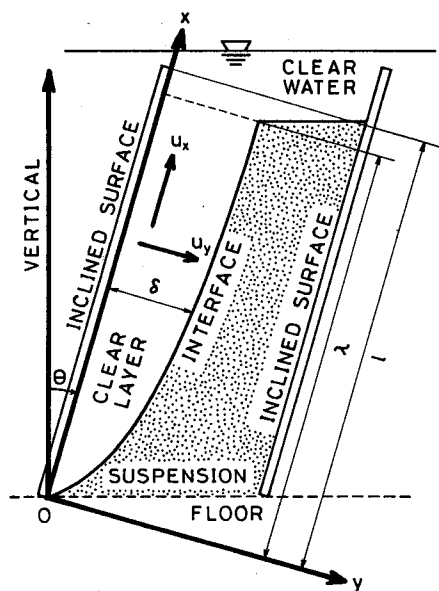


Fig. 1.-Definition Sketch for Clear Layer

小さく、隣接する傾斜板の上面が清澄層流れに及ぼす影響は無視し得る程度と考えられる。

3. 近似解 E_g 12で定義される相似変数 η を導入し、 $\hat{u}_x$ が E_g 13の様に $\hat{U}_x$ と η の多項式

$$\phi(\eta) \text{ との種で表わされるものとする。このとき、} \hat{u}_y \text{ は } E_g \text{ 2の連続方程式を用いて } E_g \text{ 14の}$$

$$\eta = \frac{\hat{y}}{\hat{\delta}} \dots (12), \quad \hat{u}_x = \hat{U}_x \cdot \phi(\eta) \dots (13), \quad \hat{u}_y = \hat{U}_x \frac{d\hat{\delta}}{d\hat{x}} [\phi\eta]_0^\eta - \frac{d}{d\hat{x}} (\hat{U}_x \hat{\delta}) \int_0^\eta \phi d\eta \dots (14)$$

様に与えられる。 $\hat{u}_x$ に対する境界条件より E_g 15, 16, 17 が得られ、 $\phi(\eta)$ は E_g 18の様に決定

$$\phi(0) = 0, \quad \phi(1) = 1, \quad \phi'(1) = -\ell \dots (15), (16), (17), \quad \phi(\eta) = -(\ell+1)\eta^2 + (\ell+2)\eta \dots (18)$$

される。従って、 $\hat{\delta}$ および $\hat{U}_x$ を求めれば E_g 13, 14より清澄層の流れが記述出来る。 $\hat{\delta}$ と $\hat{U}_x$ とは E_g 1から得られる運動エネルギー積分方程式と E_g 2の界面方程式とから求められる。

E_g 1の両辺に $\hat{u}_x$ を掛け $\hat{y} = 0 \sim \hat{\delta}$ で積分すると運動エネルギー積分方程式が E_g 19の様に得

$$\frac{\hat{U}_x^2}{\hat{\delta}} \int_0^1 \phi \phi' d\eta + \cos \theta \cdot \hat{U}_x \hat{\delta} \int_0^1 \phi d\eta = \frac{A}{2} \left[-\hat{U}_x^2 \frac{d}{d\hat{x}} (\hat{U}_x \hat{\delta}) \int_0^1 \phi d\eta + \frac{d}{d\hat{x}} (\hat{U}_x^3 \hat{\delta}) \int_0^1 \phi^3 d\eta + \hat{U}_x^3 \frac{d\hat{\delta}}{d\hat{x}} \{ \phi(1) - \phi^3(1) \} \right] \dots (19)$$

$$\hat{U}_x = \frac{1}{(-\int_0^1 \phi \phi' d\eta)^{1/3} (\int_0^1 \phi d\eta)^{1/3}} \cos \theta \cdot (\tan \theta \cdot \hat{x})^{2/3} \dots (20), \quad \hat{\delta} = \frac{(-\int_0^1 \phi \phi' d\eta)^{1/3}}{(\int_0^1 \phi d\eta)^{2/3}} (\tan \theta \cdot \hat{x})^{1/3} \dots (21)$$

られる。傾斜板下面の近傍は粘性が卓越するので慣性項を無視した Stokes 近似を行なうと、

E_g 3, 20より、 $\hat{U}_x$ と $\hat{\delta}$ とが E_g 20, 21の様に与えられる。従って、求める $\hat{u}_x$ と $\hat{u}_y$ とは E_g 13, 14より E_g 22, 23の様になる。Stokes 近似を

$$\hat{u}_x = \left\{ \frac{16}{(\ell+1)(\ell+4)^2} \right\}^{1/3} \frac{1}{2} \cos \theta \cdot (3 \tan \theta \cdot \hat{x})^{2/3} \{ -(\ell+1)\eta^2 + (\ell+2)\eta \} \dots (22)$$

$$\hat{u}_y = -\frac{\ell+2}{\ell+4} \sin \theta \cdot \eta^2 \dots (23)$$

した場合のエネルギー積分方程式の誤差は E_g 19の右辺の慣性項に相当し、 E_g 24で与え

$$I = \frac{4^{1/3} (\ell+2)^2 (\ell+6)}{(\ell+1)^{2/3} (\ell+4)^{2/3}} \frac{A}{20} \sin \theta \{ \cos \theta \cdot (3 \tan \theta \cdot \hat{x})^{2/3} \} \dots (24)$$

られる。 $\hat{\delta}$, $\hat{u}_x$, $\hat{u}_y$, I 等は ℓ の関数である。ただし、傾斜板間において、清澄層厚さが懸濁層厚さに比して十分小さいときは ℓ は非常に小さく、通常、 $\ell \approx 0$ とし得る。

Fig. 2は $\hat{u}_x$ と $\hat{u}_y$ との η 分布を、 $\ell = 0$ に対して図示したものである。 $A = 0$ の Stokes 近似の場合で、 $A \neq 0$ が慣性項を考慮した場合である。通常の水処理では、 A は5程度以下と考えられるから、Stokes 近似でも清澄層流れを十分表わし得るものと考えられる。

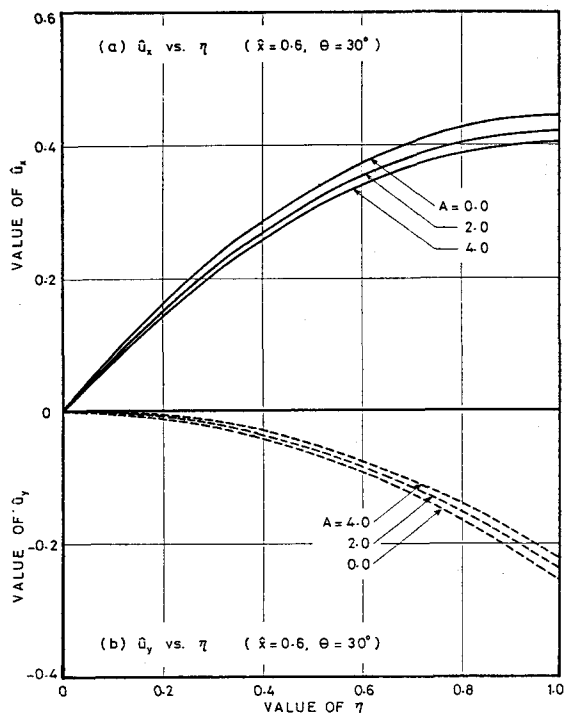


Fig. 2.-Clear Layer Velocity $\hat{u}_x$ and $\hat{u}_y$