

波による質量輸送に関する一考察

大阪府立工業高等専門学校

正員 平山秀夫

豊橋技術科学大学

学生員。本田尚正

1. はしきき: これまで質量輸送に関する代表的な理論的研究としては、非回転非粘性流体を仮定した Stokes の研究 (1847) をはじめとして、流体の粘性を考慮した Longuet-Higgins の研究 (1953, 1960) などがあることは周知のとおりであるが、いずれも実験値と理論値との差異はかなり大きく、また、解の適用限界などに関しても議論すべき余地は多い。本研究ではこのような観点から、質量輸送に関する従来の研究の問題点を整理し、その解決方法を模索しようとするものである。ここでは、主として Longuet-Higgins の Conduction Solution に基いて考察し、特に境界層内に発生する渦度の拡散が質量輸送速度の分布特性に及ぼす影響については、Longuet-Higgins の実験結果をもとに言及する。

2. 質量輸送に関する従来の研究の問題点とその検討

1) Conduction Sol. の適用限界 $q^2 \ll 1$ について: Longuet-Higgins (1953) は、渦度方程式から流体主流領域の質量輸送速度分布を支配する方程式を次式のように与えている。

$$\delta^2 \left(U \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + W \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right) \nabla^2 \bar{u} - \nu \nabla^4 (\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2) = 0 \quad (1)$$

(ここに、 $\delta = q/\omega$, q : 波の振幅, ω : 波長, U, W : 水平及び鉛直質量輸送速度, ν : 動粘性係数, $\delta = (\frac{\nu}{\omega})^{1/2}$: 境界層厚) を規定する量, $\bar{u}$: 波動場の流速の時間平均の流れ関数, 添え字は order を示す。

式(1)の左辺第1項 (convection term) と同第2項 (conduction term) の order を比較し、前者に比して後者の order が卓越すると仮定して得られる条件が $q^2 \ll 1$ であり、実際には普通の水槽内での実験条件下ではこの条件は殆ど満足されない。しかしながら、Longuet-Higgins は式(1)中の δ の order に δ の order を与えており、現実には δ は水槽水深 h ($h \ll \omega$) の order を持つので、これにより式(1)を再検討すると次式を得る。

$$\frac{q^2}{\omega^2} \cdot \frac{\omega^2}{h^2} \ll 1 \quad (2)$$

この式(2)は、長周期波の場合には成り立つようになる。一般に、長周期波の場合、 U の実験値は Conduction Sol. と比較的同じ傾向を示すことから (平山 [1978])、式(2)により、従来より指摘されてきた Conduction Sol. の適用限界 ($q^2 \ll 1$) の矛盾は、多少は緩和されたことになる。

2) Conduction Sol. の底面境界条件について: Conduction Sol. は、底面質量輸送速度のみを境界層外縁と流体主流領域で一一致させているが、底面速度勾配については、底面境界層内の境界層方程式から得られる結果と Conduction Sol. から得られるそれとは、次式に示すように一致しない。

$$\left(\text{境界層方程式より} \right) \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \Big|_{z=h} = 0 \quad (3)$$

$$\left(\text{Conduction Sol. より} \right) \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \Big|_{z=h} = \frac{q^2 \omega^2}{4 \sinh^2 kh} \left\{ 2 \sinh 2kh + \frac{3}{kh} \left(\frac{\sinh 2kh}{kh} + 3 \right) \right\} \quad (4)$$

今式(3)を考慮して Conduction Eq. を解くと次の2式を得る。

(境界条件に水面速度勾配と式(3)を用いた場合)

$$\bar{u} = \frac{q^2 \omega^2}{4 \sinh^2 kh} \left\{ 2 \cosh 2kh \left(\frac{z}{h} - 1 \right) + kh \sinh 2kh \left\{ 2 \frac{z}{h} \left(\frac{z}{h} - 2 \right) + \frac{4(kh)^2 - 3}{3(kh)} \right\} \right\} \quad (5)$$

(境界条件に底面質量輸送速度と式(3)を用いた場合)

$$\bar{u} = \frac{q^2 \omega^2}{4 \sinh^2 kh} \left\{ 2 \cosh 2kh \left(\frac{z}{h} - 1 \right) + 3 - 3 \left(\frac{3kh + \sinh 2kh}{kh} \right) \left(\frac{z}{h} - 1 \right)^2 \right\} \quad (6)$$

Hideo Hirayama, Naomasa Honda.

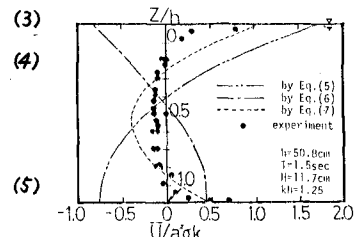


図-1 境界条件の違いによる実験値と理論値との比較

尚, Conduction Sol., は境界条件に底面質量輸送速度と水面速度勾配を用いた場合に得られ, 式(7)のようになる(底面条件に式(4)を用いても同様に式(7)が得られる。)

$$\bar{U} = \frac{a^2 \sigma k}{4 \sinh kh} \left\{ 2 \cosh 2kh \left(\frac{z}{h} - 1 \right) + 3 + kh \left(3 \frac{z^2}{h^2} - 4 \frac{z}{h} + 1 \right) \sinh 2kh + 3 \left(\frac{\sinh 2kh}{kh} + \frac{3}{2} \right) \left(\frac{z^2}{h^2} - 1 \right) \right\} \quad (7)$$

式(5)~(7)と Russell & Osorio (1959) の実験結果との比較を図-1に示すが, 式(3)を考慮した上述の2式は, いずれも実験値分布と傾向を異にしている。このように境界層内外での底面速度勾配の不一致ということは, 理論展開上, 若干問題があるように思われる。

3) 境界層内の渦度の拡散と質量輸送の分布特性について: Longuet-Higgins (1960) は, 水面境界層内から流体主流領域への渦度(ω)の拡散の時間的変化について理論的に考察し, 次式を得ている。

$$1 - \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{z}{2\sqrt{\nu t}}} e^{-\theta^2} d\theta \quad (8)$$

(ここに, $\omega = \omega(z, t)$: 境界層外縁における渦度の初期の分布を示す式
 ω_0 : ω の最大値, $z = \frac{z}{2\sqrt{\nu t}}$, z : 水面より下方にとった鉛直座標
 t : 進波開始後の経過時間, ν : 動粘性係数)

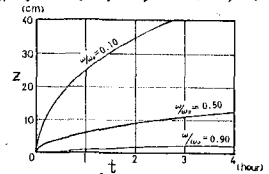


図-2 ω/ω_0 の変化による z と t の関係

式(8)を図で示したのが図-2である。この図から, 境界層からの渦度の拡散は非常に遅いことがわかる。また, Longuet-Higgins は, 質量輸送速度の水面速度勾配を直接測定して図-3を得ている。この図から明らかなように, 実験値は下記に示す Stokes の理論と Longuet-Higgins の理論との中間に位置しており, その平均分布は次式のようなになる。

(実験直線) $\frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \Big|_{z=0} = -3.2 a^2 \sigma k^2 \cosh kh \quad (9)$

(Stokes の理論) $\frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \Big|_{z=0} = -2 a^2 \sigma k^2 \cosh kh \quad (10)$

(Longuet-Higgins の理論) $\frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \Big|_{z=0} = -4 a^2 \sigma k^2 \cosh kh \quad (11)$

式(10)と式(11)の差が粘性による渦度と考えられ, 波の運動の初期段階では水面速度勾配は式(10)であり, 長時間経過した後に波の運動が定常状態に達した場合, 水面速度勾配は式(11)となる。よって両者の過渡期においては, Longuet-Higgins の実験結果からわかるように, 水面速度勾配は式(10)と式(11)の間の値をとることになる。これより, 着者らは, Conduction Sol. の水面境界条件に境界層内から発生する渦度の拡散の程度によって実験的に決定される係数 α ($0 < \alpha \leq 2.0$) を導入し, 次式を得た。

$$\bar{U} = \frac{a^2 \sigma k}{4 \sinh kh} \left\{ 2 \cosh 2kh \left(\frac{z}{h} - 1 \right) + 3 + \frac{1}{2} \alpha kh \left(3 \frac{z^2}{h^2} - 4 \frac{z}{h} + 1 \right) \sinh 2kh + 3 \left(\frac{\sinh 2kh}{kh} + \frac{3}{2} \right) \left(\frac{z^2}{h^2} - 1 \right) \right\} \quad (12)$$

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \Big|_{z=0} = 2 \left(1 + \frac{1}{2} \alpha \right) a^2 \sigma k^2 \cosh kh \quad (0 < \alpha \leq 2.0) \quad (13)$$

式(12), 式(13)は $\alpha = 2.0$ の時にそれぞれ式(7), 式(11)となり, また, $\alpha = 0$ の時には式(12)は Huang (1970) の理論結果と一致し, 式(13)は式(10)となる。図-4は, 図-3における実験直線 ($\alpha = 1.2$ の場合) に基づく式(12)の結果と Russell らの実験値及び Conduction Sol. ($\alpha = 2.0$), Huang の理論結果 ($\alpha = 0$) などと比較したものである。この図から, 着者らの式の方が Conduction Sol. よりも実験値をよく説明しているように思われる。また, Huang の式は水面境界条件に $\alpha = 0$ の Stokes の式(10)と与えており, 水面境界層からの渦度の影響を無視していることになり, 実際現象と若干矛盾するよう思われる。最後に, 御指導を賜った京都大学岩垣雄一教授に心から謝意を表す。

参考文献 1) Longuet-Higgins, M.S.: Mass transport in water wave, Phil. Trans. Royal Soc., London, Series A, No. 903, Vol. 245, pp. 535-581, 1953.

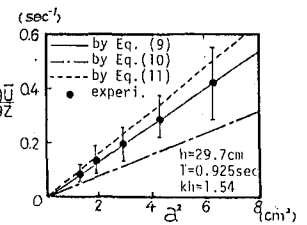


図-3 α, H の実験結果による $\partial \bar{U} / \partial z$ と z/h との関係

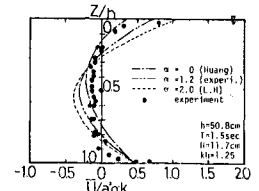


図-4 α の変化による理論値と実験値との比較