有限要素法による底面波動境界層の解析

京都大学工学部　正員　岩垣　雄一，正員　浅野　敏之，
沢路　陽一，　大成建設　○正員　大前　博

1. はじめに　本研究は，波動によって底面近傍に形成される層流境界層の水粒子速度を，有限要素法を用いて解析したものである。非線型項を考慮した境界層方程式をガラーキン法で定式化し，底面が水平な場合に初期条件および境界条件をいかなる形で与えれば，安定で正確な解が得られるかを検討した。また，底面に砂連が生じた場合についても解析を試みた。

2. 基礎方程式とガラーキン法による定式化　非定常な非圧縮性流体に対する2次元の層流境界層方程式は，波の進行方向にx軸，底面に垂直にz軸をとり，それぞれの方向における速度成分をuおよびwとすれば次式で与えられる。

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$

ただし，t：時間，P：圧力，ν：動粘性係数，ρ：密度 である。

境界層近似により，右辺第1項の圧力項は境界層外の水平方向水粒子速度Uから計算される。すなわち，$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial U}{\partial t}+U\frac{\partial U}{\partial x}$ ……(2)　さらに連続式 $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$ ……(3) を連立することにより，未知量u，wを求めることになる。次に解析領域を有限個の三角形要素群に分割し，1つの要素内のu，wを節点での値u^n，w^nと形状関数ϕを用いて近似する。すなわち，$u\simeq\phi^T u^n$ ……(4)，$w\simeq\phi^T w^n$ ……(5)，ガラーキン法は近似関数を用いたことによる残差の最小化を，形状関数ϕとの直交化により求めようとするものである。ただし，今回用いたϕはxとzについての一次式であり，2階以上の微係数を表現することができない。したがって，(1)式の右辺第2項$\nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$は，部分積分により1階の微係数で構成される式に変形し，連続性を満足させる必要がある。上記の手続きより(1)式は次式に変形される。

$$\delta u^{nT}\iint\phi\phi^T dxdz\frac{\partial u}{\partial t}+\delta u^{nT}\iint\phi\phi^T u^n\phi_x^T u^n dxdz+\delta u^{nT}\iint\phi\phi^T w^n\phi_z^T u^n dxdz$$
$$+\frac{1}{\rho}\iint\frac{\partial P}{\partial x}\phi^T\delta u^n dzdx-\nu\delta u^{nT}\int[\phi\phi_z^T]_0^h dx\,u^n+\nu\delta u^{nT}\iint\phi_z\phi_z^T dzdx\,u^n=0 \quad \cdots\cdots (6)$$

ここで積分は要素内での積分を示す。上式の第2項と第3項は，u^n，w^nについて非線型であり，Newton - Raphson 法を用いた線型化を行わねばならない。また(6)式は，ある時刻tにおいて空間的に離散化された式であり，時間方向の離散化には差分法を導入する必要がある。以上に示した節点未知数間の方程式を全体マトリックスに格納し，係数行列のバンド化とガウスの消去法の解析手順から節点未知数が求められる。

3. 計算条件　計算は水深が50cmで周期2.0secの波が伝播する場合を取り扱った。波高は16.22cmで，波形勾配は0.04となる。解析領域は水平方向に1波長の2/5倍の領域，鉛直方向には層流境界層理論から得られる境界層厚さ$\delta_w=2\pi/\sqrt{\sigma/2\nu}$（$\sigma=2\pi/T$）をとった。水平方向の分割数は20，鉛直方向の分割数は10であり，全要素数400，節点未知数462となる。計算時間ステップは1周期の1/64であり，これより$\Delta x/\Delta t=\frac{L/50}{T/64}\geq C$となり，

IWAGAKI YUUICHI,　ASANO TOSHIYUKI,　SAWAJI YOUICHI,　○OHMAE HIROSHI,

C.F.L.条件を満足している。

4. 水平床の場合の計算結果　境界層内の水粒子速度を得るためには，境界層外縁と解析領域の左右境界に境界値を与える必要がある。また解析領域内に初期値を入れる必要がある。図-1は境界条件に岩垣・土屋・坂井・陳(1966)が導いた層流境界層の2次近似解を与え，初期条件としては流速0を全内部節点に与えた場合の計算結果である。図中には岩垣らの理論値もあわせて示した。この結果から，初期値として理論値を与えなくても，計算値は理論値と近い値をとることがわかる。こうした数値解析が有効であるのは理論値が容易に得られない場合であることを考慮すると，境界条件を低い精度で与えても高次項を考慮した結果が得られないかどうか検討する必要がある。そこで境界条件に1次近似解を与えて，計算を行ったところ，境界から少し離れた内部の節点においては2次近似解に近い解が得られることがわかった。図2は境界層外縁では2次近似解を，左右境界では1次近似解を与えて計算した結果であり，この場合も左右境界より少し離れた内部節点では2次近似解と近い値になっていることがわかる。

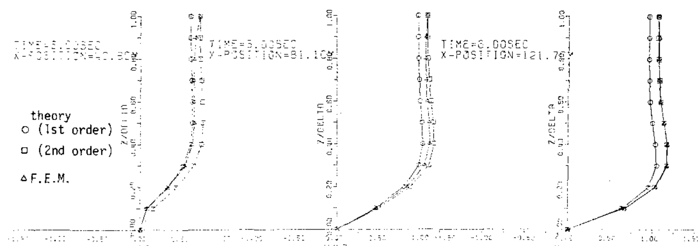

図-1　内部節点の初期値に0を入れた場合の計算結果

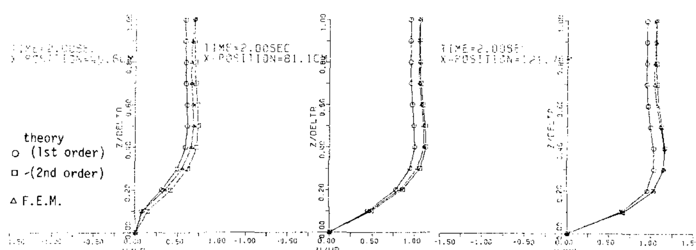

図-2　左右境界条件に層流境界層の1次近似解を入れた場合の計算結果

5. 波状床の場合の計算結果

底面を正弦曲線で与え，底面から離れるにしたがって，徐々に正弦曲線の振幅を小さくして，境界層外縁では水平な直線となるように要素分割した。図-3は底面の振幅a_bが境界層厚δ_wの0.05倍，底面の起伏の波長L_bが波の波長の2.5倍，起伏の位相θ_sが波の位相よりπだけ前進した場合の計算結果である。δ_wがこれより大きくなると，波状面の上り斜面の節点における流速値が異常に大きくなる場合があり，波状床上の流速場が(1)～(3)式の基礎式で取扱えるかどうかは今後の検討課題としたい。最後に，研究の全過程において御教示をいただいた熊本大学工学部の滝川清助手に謝意を表する。

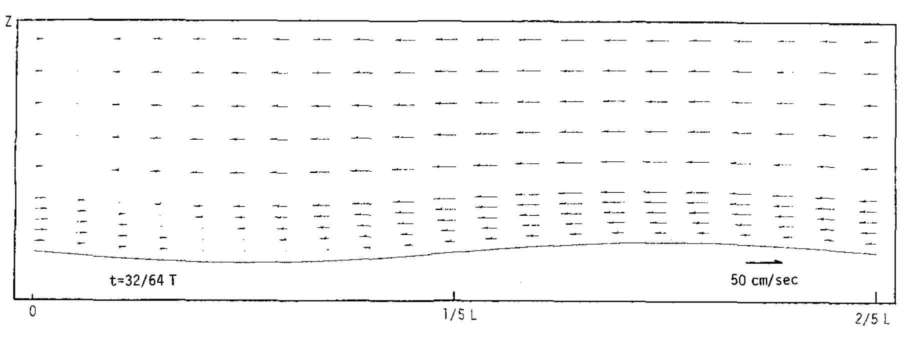

図-3　波状床での計算結果の1例