

1. 概説

浅水域における潮流を支配する浅水波方程式は双曲型偏微分方程式としての性質が強い。そこで、双曲型方程式にガラーキン有限要素法を適用した場合の数値解の挙動を調べることにした。また、浅水波方程式に対する安定でかつ高効率で有効な結果を得る手法を開発することを目指とした。

まず、最も取り扱いが簡単で、しかも、厳密解の得られる線形輸送方程式を基礎方程式として各種アプローチを検討した。その中で、空間方向にガラーキン有限要素法を用い離散化し、時間方向にRalston Runge-Kutta法を用い離散化を行う手法が、時間方向に陰解法であるCrank-Nicolson法を用い離散化する手法と同程度の精度が得られることを最小二乗法による誤差評価式を用いて示した。この手法が先の目標に合致するとの立場から、1次元浅水波方程式に対して適用を拡張した。また、行列法を利用して十分条件となる安定条件式を誘導した。

2. 線形輸送方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \begin{array}{l} x \in \Omega = (0, 1) \\ t \in [0, T] \end{array} \quad (1)$$

$$\text{初期条件} \quad u(x, 0) = \{\sin(2\pi x) + 2\} / 4 \quad (2)$$

$$\text{境界条件} \quad u(0, t) = \{-\sin(2\pi t) + 2\} / 4 \quad (3)$$

ここで、関数 $u(x, t)$ は独立変数 x, t によって定義される。特性曲線法によって $t = 0.5$ での厳密解を求め、図-2に示す。また、図-1は初期条件、すなわち $t = 0.0$ における u の値である。

式(1)に対して空間方向の区間 $[0, 1]$ を N 個の小区間 Δx に分割し、ガラーキン有限要素法を適用すると

$$\sum_{i=1}^{N+1} \left(\frac{d}{dt} u_i^h(t) \right) (\phi_i, \phi_j)_0 + \sum_{i=1}^{N+1} u_i^h \left(\frac{d\phi_i}{dx}, \phi_j \right)_0 = 0 \quad (4)$$

ここで、 $j = 1, 2, \dots, N+1$ 。また、 u_i^h は節点 i での u の値、 ϕ は基本関数である。

$$(u, v)_0 = \int_{\Omega} uv d\Omega \text{ を表わす。}$$

式(4)を次のように表わす。

$$M \frac{d}{dt} \underline{u} + D \underline{u} = 0 \quad (5)$$

ここで、添字 $\underline{\quad}$ はベクトル量であることを

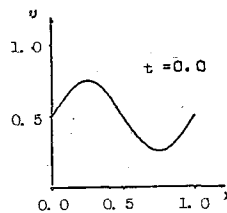


図-1

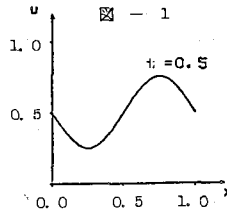


図-2

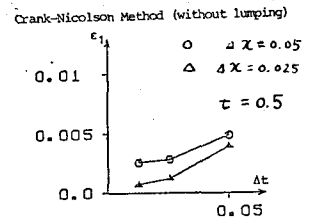


図-3

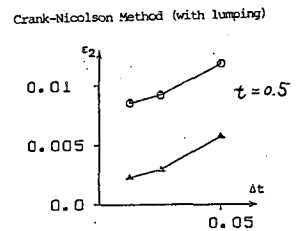


図-4

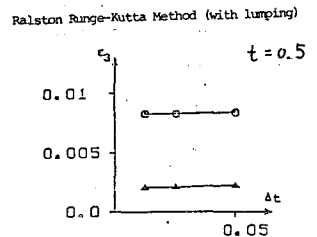


図-5

表わす。

式(5)は一階の常微分方程式である。この方程式系に対しては各種の差分法のアプローチが提案されている。

ここでは、陰解法であ

る Crank-Nicolson法と

陽解法である Ralston Runge-Kutta法を用いて離散化し、下の誤差評価式を用いて誤差評価を行った。

$$\epsilon = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n^*} (u_i - u_i^*)^2}{n^*}}$$

u_i : 節点 i における近似解

u_i^* : 節点 i における厳密解

n^* : 総節点数

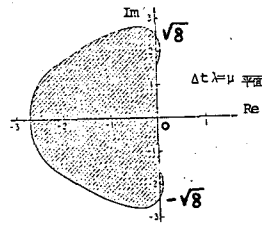


図-6

4次のRunge-Kutta法の絶対安定領域

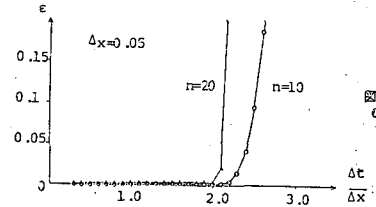


図-7
Case 1

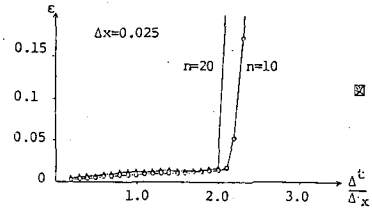


図-8
Case 2

結果を図-3～図-5に示す。Lumpingとは式(5)中の M マトリックスを対角化する方法であり、これによって計算効率は著しく高まる。また、図-6の4次のRunge-Kutta法の安定領域を利用して安定条件式を誘導すると次のようになる。

$$\Delta t \leq \sqrt{2} \Delta x \quad (\text{ただし、Lumpingを用いた場合}) \quad (7)$$

図-7, 8に実際に $\Delta t, \Delta x$ を変えて計算した結果を示したが、結果は条件式(7)を満たす。

3. 1次元浅水波方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \begin{matrix} x \in \Omega = (0, 1) \\ t \in (0, T) \end{matrix} \quad (8)$$

式(8)に対し、空間方向にガラーキン有限要素法を、時間方向にRalston Runge-Kutta法を用

$$\Delta t \leq \frac{3}{2} \sqrt{2} \frac{\Delta x_j}{\max |u_1|} \quad (9)$$

い離散化した場合の安定条件は式(9)である。

また、1次元浅水波方程式(10), (11)に対する安定条件は、式(9)を利用して、式(12)となる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial \xi}{\partial x} + g \frac{u |u|}{c^2(h+\xi)} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + (h+\xi) \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial (h+\xi)}{\partial x} = 0 \quad (11)$$

$$\Delta t \leq 3\sqrt{2} \frac{\min_j \Delta x_j}{\max |u_1 + 2g(h_1 + \xi_1)|} \quad (12)$$

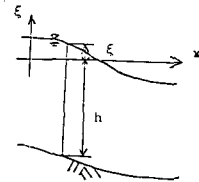


図-9

ただし、条件式(12)の誘導にあたって海底摩擦項等などの外力は無視した。

浅水波方程式に対して、空間方向にガラーキン有限要素法、時間方向にRalston Runge-Kutta法を用いて数値実験を行った。結果については講演中に発表する。式(12)によって得られた安定条件式は外力項を無視しているので、実際の計算にあたって現実的な解を得るためには、より長い時間ステップ Δt が必要であった。

参考文献

N. Praagman : "Numerical Solution of the Shallow Water Equations by a Finite Element Method" (1979)