

## 水理学を対象とした境界要素法の適用について (その2)

京都大学工学部 正員 岩佐 義朗  
京都大学大学院 学生員 山野 一弥

京都大学工学部 正員 多田 彰秀  
京都大学大学院 学生員 泊 宏

1.はじめに; 非定常な水理現象に対し境界要素法を用いて数値解析する研究は、いくつか試みられているものの、<sup>1)2)</sup> 差分法や有限要素法を用いた研究と比較すればその数は少ない。本報では、水平に置かれた円管 (半径  $R$ ) 内での圧力こう配が正弦的に変化する一方向流れ (以下、“振動流” と称す) を対象として、積分方程式を誘導、離散化し数値解析を実施するとともに、得られた計算結果と理論解との比較・検討を行なうことにより、境界要素法を用いた数値解析法の有効性・妥当性について考察したものである。

## 2.基礎方程式および定式化; 振動流の基礎方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} - L \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \alpha_0 \sin \omega t \quad (1)$$

で与えられる。次に、無次元量  $y = Y/R$ ,  $z = Z/R$ ,  $t = T/T^*$  および  $u = U/\alpha_0 R^2$  を(1)式に導入して無次元化を行なえば次式のようなになる。

$$\text{支配方程式; } \frac{\partial u}{\partial t} - L \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \sin At \quad (A = \frac{\omega R^2}{\nu}) \quad (2)$$

$$\text{境界条件; } r = \sqrt{y^2 + z^2} = 1 \quad \text{で } u(y, z, t) = 0 \quad (3)$$

$$\text{初期条件; } u(y, z, 0) = f(y, z) \quad (4)$$

ここで、(2)式に対応する基本解を  $G(y, z, t; \xi, \eta, \tau)$  とすれば、基本解は、 $\frac{\partial G}{\partial t} - L \left( \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} \right) = \delta(y, z, t; \xi, \eta, \tau)$  [ただし、 $\delta$ ; Dirac のデルタ関数] を満足し、

$$G(y, z, t; \xi, \eta, \tau) = \frac{1}{4\pi(t-\tau)} \exp \left\{ -\frac{(y-\xi)^2 + (z-\eta)^2}{4(t-\tau)} \right\} \quad (5)$$

で与えられる。Banerjee に従って時間積分を行ない整理すると、

$$C^i u_i^n = \int_0^t \int_\Omega G \delta d\Omega d\tau - \int_0^t \int_\Omega u \frac{\partial G}{\partial n} d\Omega d\tau + \int_\Omega G(y, z, t; \xi, \eta, 0) f d\Omega + \int_0^t \int_\Omega G \sin A\tau d\Omega d\tau \quad (6)$$

さらに、微小時間  $\Delta t$  の間では関数値  $u$  および  $\delta (= \frac{\partial u}{\partial t})$  の値が一定であると仮定すれば、

$$C^i u_i^n = \int_0^{t-\Delta t} \int_\Omega G \delta d\Omega d\tau + \int_0^{t-\Delta t} \int_\Omega \left\{ \frac{u^{n-1} + u^n}{2} \right\} \frac{\partial G}{\partial n} d\Omega d\tau - \int_0^{t-\Delta t} \int_\Omega u \frac{\partial G}{\partial n} d\Omega d\tau - \int_0^{t-\Delta t} \int_\Omega \left\{ \frac{u^{n-1} + u^n}{2} \right\} \frac{\partial G}{\partial n} d\Omega d\tau + \int_\Omega G(y, z, t; \xi, \eta, 0) f d\Omega + \int_0^t \int_\Omega G \sin A\tau d\Omega d\tau \quad (7)$$

となる。ただし、 $u_i^n, \delta_i^n$ ; 時刻  $t = n\Delta t$  における点  $i$  の  $u$  および  $\delta$  の値 (未知),  $u_i^{n-1}, \delta_i^{n-1}$ ; 時刻  $t = (n-1)\Delta t$  における点  $i$  の  $u$  および  $\delta$  の値 (既知),  $C^i = 1 - \frac{\Delta t}{2L}$  である。境界および領域積分については、岩佐・山野らと同様な方法を採用した。その結果、各時間ステップにおいて、境界上の  $M$  個の節点での  $u$  を未知数とする  $M$  元一次連立方程式が得られ、これを解くことにより、境界上の未知量が求まる。領域内部の任意の点  $i$  での流速値は、(7)式  $C^i = 1$  とし、上で得られた値を用いて計算できる。この過程を、図-1のフローチャートに従ってくり返し行なえばよい。

## 3.計算結果および考察; 表-1に示すような3ケースについて計算を行なった。CASE 2は振

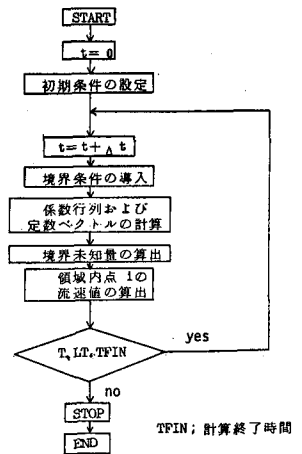


図-1 非定常解析のフローチャート

動がきわめて遅い場合である。なお、ここで用いる理論解は、(2)式を直接解くことにより次式で与えられる。

$$u(y,z,t) = u(r,t) = \frac{e^{i\alpha t}}{A} \left\{ \frac{J_0(\alpha r)}{J_0(\alpha)} - 1 \right\} \quad (8)$$

ただし、 $r = \sqrt{y^2 + z^2}$ 、 $\alpha = \sqrt{A}$  (複素数)、 $J_0$ ; 0 次の Bessel 関数である。CASE 1 において、理論解と計算値の間で振幅と位相に若干のずれが見られる。(図-3参照)。これは、初期条件の相違および図-6に示すような圧力こう配の差に起因するものと考えられる。そこで、より理論解の現象に近いと思われる CASE 3 について計算を行なったが、振幅および位相のずれは縮まらなかった。一方、CASE 2 においては、位相のずれはほとんど見られない(図-4参照)。これは時間的变化が小さく、初期条件もほぼ一致しているためと思われる。表-2は、CASE 2 で  $\Delta t$  を 5 通りに変化させて計算した結果のうち、 $t=50$  での管中央の  $u$  の値を示したものである。この表より、 $\Delta t$  が小さいほど解の精度がよくなるとは言えない。差分法では、C.F.L. 条件等の研究がなされており、 $\Delta t$  に関するなんらかの情報も提供してくれるが、境界要素法では、そのような研究もなく、 $\Delta t$  の最適値を求めることはたいへん困難である。また図-3および図-4の計算開始数ステップにおいて精度の悪化が見られる。これは、計算開始直後で基本解の変化が急激なために生じるものと考えられる。さらに、未知量の減少から期待される計算時間の短縮は見られなかった。その原因としては、①係数行列が full Matrix であること ②数値積分を各ステップごとにくり返して行なわなければならないことが考えられる。

4. おわりに; 境界要素法は、基本的に線形の場合で基本解を有する微分方程式のみにしか適用できない解法であり、現段階では、水理学のごく一部の現象にのみ有効な数値解析法であるといえよう。《参考文献》1) 松梨, 中後, 吉川; 境界要素法の拡散解析への適用, 土木学会関西支部年次講演会概要集, II-66-1~66-2, 1983 2) 松梨, 中後, 吉川; 境界要素法の非定常拡散問題への適用, 土木学会年次講演会概要集, P349~350, 1983 3) P. K. Banerjee, R. Butterfield; Boundary Element Methods in Engineering Science, Mc Graw-Hill, 1981 4) 岩佐, 弓田, 山野; 水理学を対象とした境界要素法の適用について, 土木学会関西支部年次講演会概要集, II-65-1~65-2, 1983

表-1 計算 CASE

|        | 角振動数                 | 無次元化周期 | 初期条件               |
|--------|----------------------|--------|--------------------|
| CASE 1 | $\pi$                | 2      | 静止                 |
| CASE 2 | $\pi \times 10^{-2}$ | 200    | 静止                 |
| CASE 3 | $\pi$                | 2      | CASE 1 の $t=20$ の値 |

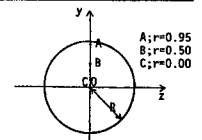


図-2 円管の断面図

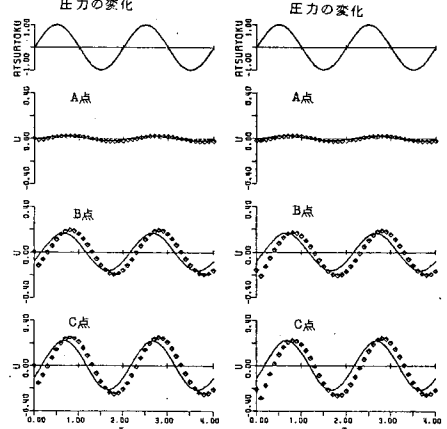


図-3 各点の流速変化 (CASE1,  $\Delta t=0.1$ )

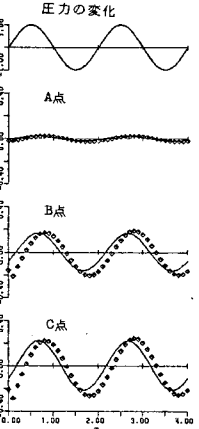


図-4 各点の流速変化 (CASE3,  $\Delta t=0.1$ )

図-4の計算開始数ステップにおいて精度の悪化が見られる。これは、計算開始直後で基本解の変化が急激なために生じるものと考えられる。さらに、未知量の減少から期待される計算時間の短縮は見られなかった。その原因としては、①係数行列が full Matrix であること ②数値積分を各ステップごとにくり返して行なわなければならないことが考えられる。

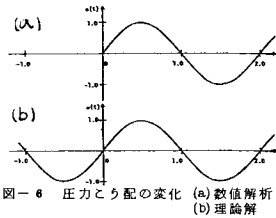


図-6 圧力こう配の変化 (a) 数値解析 (b) 理論解

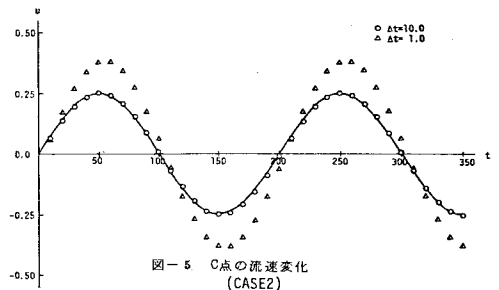


図-5 C点の流速変化 (CASE2)

表-2  $\Delta t$  と C 点での流速値 (CASE2)

| $\Delta t$ | C点での流速値 ( $t=50$ ) |
|------------|--------------------|
| 1.0        | 0.379265           |
| 2.5        | 0.284859           |
| 5.0        | 0.260479           |
| 10.0       | 0.251009           |
| 20.0       | 0.298912           |

4. おわりに; 境界要素法は、基本的に線形の場合で基本解を有する微分方程式のみにしか適用できない解法であり、現段階では、水理学のごく一部の現象にのみ有効な数値解析法であるといえよう。

《参考文献》1) 松梨, 中後, 吉川; 境界要素法の拡散解析への適用, 土木学会関西支部年次講演会概要集, II-66-1~66-2, 1983 2) 松梨, 中後, 吉川; 境界要素法の非定常拡散問題への適用, 土木学会年次講演会概要集, P349~350, 1983 3) P. K. Banerjee, R. Butterfield; Boundary Element Methods in Engineering Science, Mc Graw-Hill, 1981 4) 岩佐, 弓田, 山野; 水理学を対象とした境界要素法の適用について, 土木学会関西支部年次講演会概要集, II-65-1~65-2, 1983