

二次内挿の特性曲線法を用いた非定常流の数値解析

京都大学工学部 正員 岩佐 義朗

京都大学工学部 正員 〇茅田 彰秀

1.はじめに: 前報¹⁾では、従来から筆者らが用いている固定格子点の特性曲線法において内挿計算の精度を上げた差分法を示し、時間的变化の急な流れの数値解析を試みた。その結果、一様水路ではLax-Wendroff法と精度上ほとんど差がないことが確認された。ここでは、長方形断面の一様水路内に発生する変化の急な流れを上述の差分法を用いて運動量解析法により数値解析するとともに、エネルギー解析法による解析結果との比較を行なったものである。

2.基礎式および差分式: 運動量解析法を適用すれば、基礎式は次式で構成される。なお、横流入量は存在しないものとする。

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (1) \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial t} + g \frac{\partial M}{\partial x} = Ag(S_0 - S_f) \quad (2)$$

ここで、比力: $M = \frac{\beta Q^2}{gA} + \lambda A h_g \cos \theta$, h_g : 水面から流水断面の図心までの深さ, λ : 圧力分布係数, 摩擦こう配: $S_f = n^2 Q^2 / (A^2 R^{4/3})$, n : Manningの粗度係数, $S_0 = \sin \theta$, R : 径深, β : 運動量係数とする。

(1)および(2)式を特性曲線表示すれば、 $C_{\pm} = (U_0 \pm C_0) = \beta U \pm \sqrt{\beta(\beta-1)U^2 + \frac{\lambda \beta A \cos \theta}{B}}$ (3) に沿って、
 $(-\beta U^2 + \lambda g \cos \theta \frac{A}{B}) (\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x}) + (U_0 \pm C_0) \{ \frac{\partial Q}{\partial t} + g \frac{\partial M}{\partial x} - Ag(S_0 - S_f) \} = 0$ (4) が成立する。

次に、前報¹⁾で示したように二次内挿を用いて差分化を行なうと、次式が得られる(図-1参照)。

$$C_{+i} \text{に沿って} \quad CM_j^n \left(\frac{A_j^{n+1} - A_j^n}{\Delta t} + \frac{Q_j^n - Q_{j-1}^n}{\Delta x_R} \right) + (U_0 + C_0)_j^n \left\{ \frac{Q_j^{n+1} - Q_j^n}{\Delta t} + g \frac{M_j^n - M_{j-1}^n}{\Delta x_R} - g \frac{A_j^n (S_0 - S_{fj}^n) + A_{j-1}^n (S_0 - S_{fj-1}^n)}{2} \right\} = 0 \quad (5)$$

$$C_{-i} \text{に沿って} \quad CM_j^n \left(\frac{A_j^{n+1} - A_j^n}{\Delta t} + \frac{Q_j^n - Q_{j+1}^n}{\Delta x_s} \right) + (U_0 - C_0)_j^n \left\{ \frac{Q_j^{n+1} - Q_j^n}{\Delta t} + g \frac{M_j^n - M_{j+1}^n}{\Delta x_s} - g \frac{A_j^n (S_0 - S_{fj}^n) + A_{j+1}^n (S_0 - S_{fj+1}^n)}{2} \right\} = 0 \quad (6)$$

ここで、 $CM_j^n = (-\beta U^2 + \lambda g \cos \theta \frac{A}{B})_j^n$, Q_R, Q_s : 図-1のR点およびS点での流量Qを表わし、

$$Q_R = Q_j^n + \frac{\Delta x_R}{2 \Delta x} (Q_{j+1}^n - Q_j^n) + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta x_R}{\Delta x} \right)^2 (Q_{j+1}^n - 2Q_j^n + Q_{j-1}^n) \quad (7) \quad , \quad \Delta x_R = (U_0 + C_0)_j^n \Delta t$$

$$Q_s = Q_j^n - \frac{\Delta x_s}{2 \Delta x} (Q_{j+1}^n - Q_j^n) + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta x_s}{\Delta x} \right)^2 (Q_{j+1}^n - 2Q_j^n + Q_{j-1}^n) \quad (8) \quad , \quad \Delta x_s = |(U_0 - C_0)_j^n| \Delta t$$

で与えられる。 $M_R, M_s, A_s, A_R, S_{fR}, S_{fs}$ についても同様である。

Vasilievの条件²⁾を避けるために導入した $A_j^n S_{fj}^{n+1}$ については、 $n!|U_j|Q_j^{n+1}/(R_j^n)^{4/3}$ で近似するものとする。

3.計算条件と計算結果: こう配1/500の長方形断面一様水路(全長20.0m, 水路幅0.25m, 粗度係数0.011 s^{1/2}m^{1/3})を想定した。初期条件は、不等流計算により設定し、境界条件は、上下流端とも表-1に示すような水位ハイドログラフを与えた。境界点での計算は、二次内挿が適用できないので線形近似の特性曲線法を採用している。

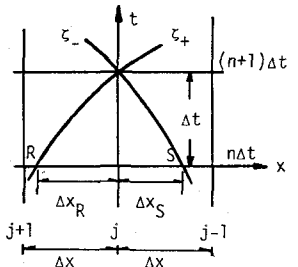


図-1 差分格子

表-1 計算ケースと境界条件

Case	上流端	下流端
1		
2		

図-2は、水路中央部での水位と流量のハイドログラフを示したものである。実線が運動量解析法(以後M法と記す)、破線が前報²⁾で示したエネルギー解析法(以後E法と記す)による計算結果である。Case1では、両解析法ともほとんど差がなく時間の経過とともに減衰振動を行ない一定値へ収束している。Case2では、水位および流量ともM法よりもE法の方が振幅が大きい。また、約0.5秒程度の位相差も確認される。

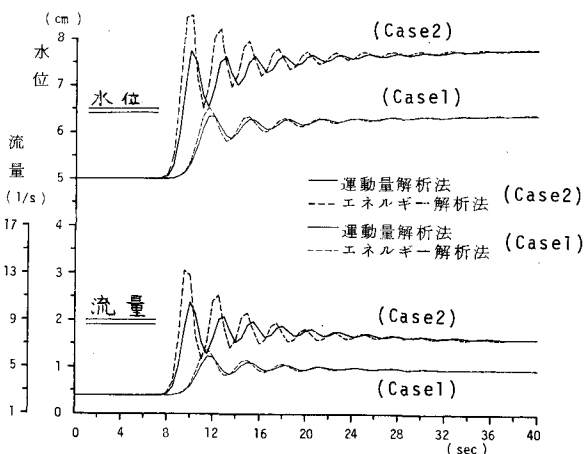


図-2 流量および水位ハイドログラフ

図-3は、Case1の水面形を、図-4は、Case2の水面形を示すもので、実線がM法による

水面形、破線がE法による水面形である。図-2から予想されるとおり、Case1では水面形は全く一致しているが、Case2ではE法の水面形の方が、波先付近での変化も急であり、伝播も若干速いようである。4.おわりに：以上より、時間的变化が急な流れほどE法とM法との間に大きな差が見られた。一様な長方形断面水路で、段波などの不連続現象が発生していない限りE法もM法も基礎式は同一のものに帰着される。Case2では、解は不連続にはなっていないから、E法とM法の食い違いのある結果は、妥当とは言えない。

(参考文献) (1) 茅田・岩佐・井上；特性曲線法を用いた非定常流の一計算法，土木学会年次講演会，昭和58年。

(2) 井上和也；開水路流れの数値解析；第16回水工学に関する夏期研修会講義集，A-3，A-6，1980年

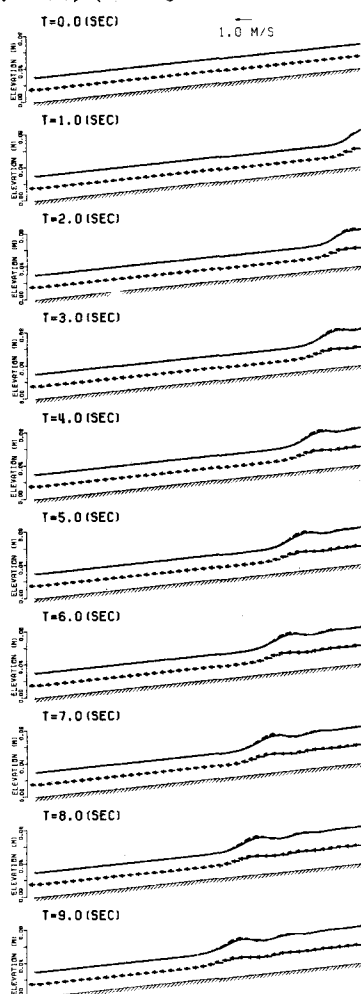


図-3 水面形 (Case1)

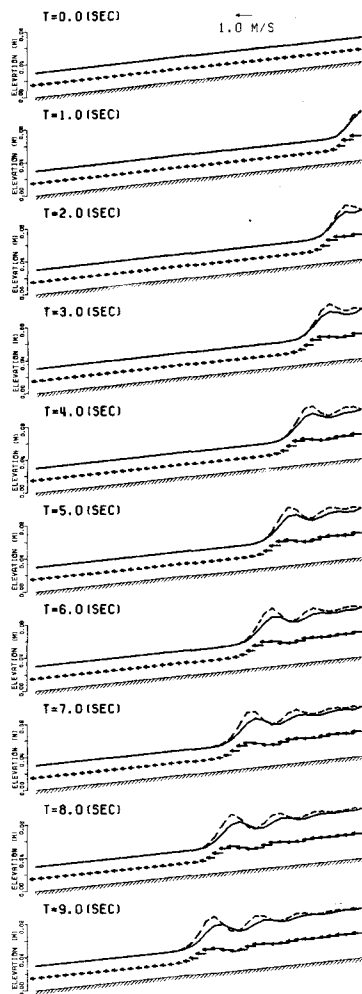


図-4 水面形 (Case2)