有限要素法による地中水地表水流動解析

京都大学工学部　正　員　高棹琢馬
京都大学工学部　正　員　椎葉充晴
京都大学大学院　学生員　○張　昇平

1.まえがき：

従来，地中水流動解析と地表水流動解析は別々に行なわれてきた，本研究では図1に示した山腹斜面の流出過程を分析することを目的として表面流モデルと地中流モデルとを結合して，同時にそれぞれの流出を解析するモデルを構成し，そのテスト結果を報告する。

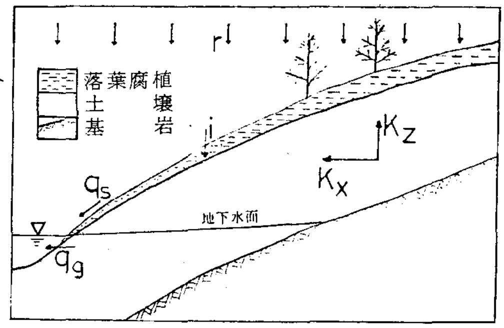

図1．斜面流出の模式図

2.モデルとその解き方：

数学モデルは飽和—不飽和浸透基礎方程式(1)、Kinematic wave 理論に基づく表面流基礎方程式(6)、(7)、(8)、(9)およびそれぞれの初期条件と境界条件から構成される。ここに K_x、K_z、K_n、K_s は添字で示す方向の透水係数、h は圧力水頭、c は比水分容量、ω は含水率、ϕ は空隙率、S_s は比貯留係数、n は境界の外向き法線、q は単位距離当たりの流入量、i は浸透強度、r は降雨強度、V は表面流平均流速、V_s は Manning 抵抗則による表面流流速、V_g は Darcy 則による地表面に沿う地中水流速、n_0 は Manning 粗度係数、θ は斜面勾配、s は飽和地点からの斜面方向の距離、L は飽和斜面の長さである。もちろん初期条件は式(5)と式(10)、境界条件は式(2)、(3)、(4)と式(11)、(12)が一致するように与えなければならない。連立偏微分方程式系の数値解析に Galerkin 有限要素法を用いる。まず地中領域全体を適当な三角形に区分して方程式(1)を定式化する；地中領域を三角形に区分することによって斜面は直線要素に区分される，この直線要素について表面流の式(6)を定式化する。式(3)と(6)にある i は同じものであることから、i を消去するために式(6)を定式化して得られた連立常微分方程式を式(1)のそれに組込むことができる。こうして得られた連立常微分方程式の時間微分項を差分近似し、Gauss 消去法によりすべての節点での圧力水頭を求める。偏微

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x\frac{\partial h}{\partial x}\right)+\frac{\partial h}{\partial z}\left(K_z\frac{\partial (h+z)}{\partial z}\right)=\left(c+\frac{\omega}{\phi}S_s\right)\frac{\partial h}{\partial t} \qquad (1)$$

$$K_n\frac{\partial (h+z)}{\partial n}\bigg|_{(x,z)\varepsilon\Gamma_1}=q(x,z,t) \qquad (2)$$

Γ_1: Neumann boundary

$$q(x,z,t)=\begin{cases} i(s,t)\cos\theta & h>0 \\ r(s,t)\cos\theta & h\leqq 0 \end{cases}$$

On surface (3)

$$h(x,z,t)\big|_{(x,z)\varepsilon\Gamma_2}=H(x,z,t) \qquad (4)$$

Γ_2: Dirichlet boundary

$$h(x,z,t)\big|_{t=0}=h_0(x,z) \qquad (5)$$

$$\frac{\partial h_s}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial s}(h_s V)=r(s,t)-i(s,t) \qquad (6)$$

$$V=V_s+v_g/\phi \qquad (7)$$

$$V_s|v_s|=\frac{1}{n_0^2}\left(\sin\theta-\frac{\partial h_s}{\partial s}\right)h_s^{4/3} \qquad (8)$$

$$V_g=K_s\frac{\partial h_s}{\partial s} \qquad (9)$$

$$h_s(s,t)\big|_{t=0}=h_0(s) \qquad (10)$$

$$h_s(s,t)\big|_{s=0}=H_0(t) \qquad (11)$$

$$h_s(s,t)\big|_{s=L}=H_L(t) \qquad (12)$$

Takuma TAKASAO, Michiharu SHIIBA, ZHANG Shengping

分方程式系は非線形であるから許容精度に達するまで反復計算する。最後にそれぞれの流速・流量を計算する。

3.計算例：

図3に示した三角形降雨の時、図2のような断面について降雨流出をシミュレートする。係数C、W、Kはhの関数として与えられる。飽和透水係数$K_x=K_y$は4m/hr、空隙率ϕは0.6、n_0は$1m^{-1/3}hr$である。初期条件は$r=1mm/hr$という条件のもとで定常問題を解いて求められたものである。時間ステップは0.05hrが三つ、0.1hrが四つ、0.15hrが三つ、その後全部0.2hrとする。65個の時間ステップで12時間にわたって計算を行なった結果は図2、図3に示したようである。

4.結論と問題点：

(1)地表流モデルと地中流モデルを連立して構成した斜面流出モデルを有限要素法で同時に解くことによって降雨流出を分析することが可能である。

(2)普通、表面流流速と地下水流流速は大きさがかなり違うので、表面流方程式を地中流方程式に組込むことによって、浸透マトリクスは対称性がなくなるだけでなく、その特性もかなり悪くなるのである。というわけで、連立方程式の収束条件もきびしくなり、許容精度に達するまでの繰り返し計算回数も増える。したがって、非線形連立常微分方程式の解法をさらに改良する必要がある。

(3)本計算例では、場のパラメータを適当に仮定したが、今後、実流域でのこれらの値を検討しつつ、流出過程の分析を進めていく予定である。

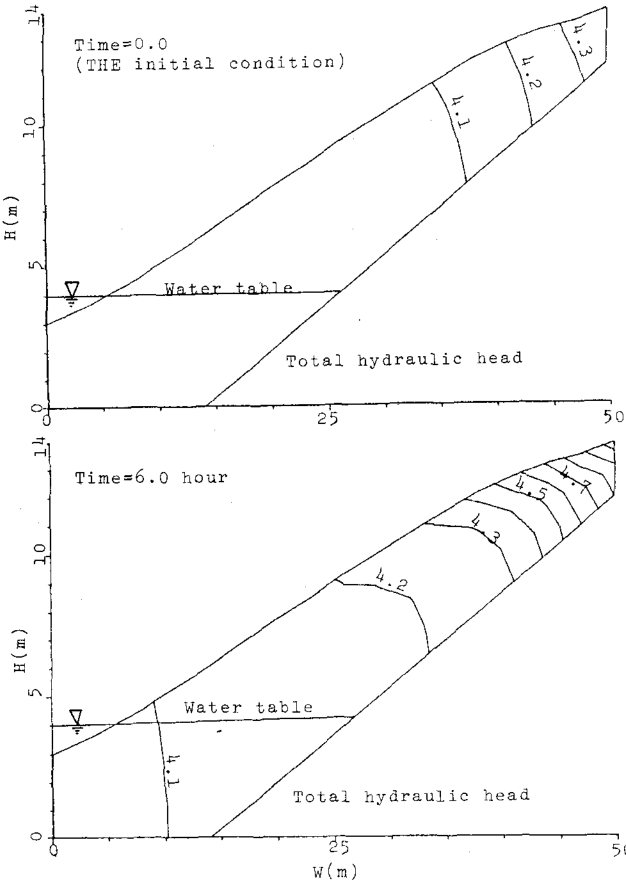

図2．降雨浸透による表面流と地中流

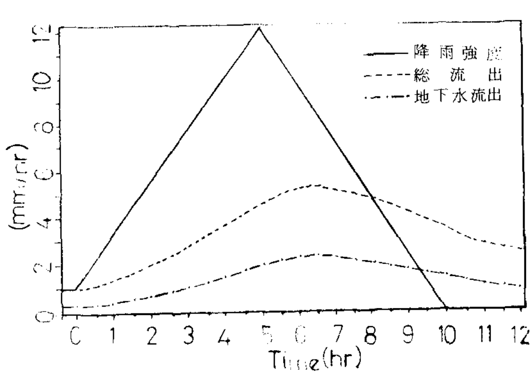

図3．降雨強度と流出

参考文献

1. Neuman, S.P.: Saturated Unsaturated Seepage by Finite Elements. Proc., ASCE HY, Vol. 99, No. 12, pp. 2233～2250, 1973.