

一雨降雨の1確率模型について

大阪大学 工学部 正 員 室田 明
 近畿大学理工学部 正 員 江藤剛治
 新日本製鉄 正 員 ○柳本速雄

1. はじめに

近年、治水における貯留施設の役割が増加してきた。排水施設のみで洪水処理を行うならば洪水災害の生起確率をピーク流量のみの関数として評価すればよい。貯留施設を含む洪水処理計画では当然、総流量も確率評価せねばならない。排水施設と貯留施設との併用によって洪水処理を行う場合、ピーク流量と総流量との同時確率を用いて洪水災害の生起確率を評価する必要がある。洪水の生起確率に対応した排水施設容量と貯留施設容量の組み合わせを求めるための基礎的研究として一雨降雨の1確率模型を提示し以下の知見を得た。

- ① 降雨継続時間 x ，ピーク雨量 y ，総雨量 z の結合確率分布を表示した。
- ② 提示した確率模型の母数を推定するための簡便な手法を提示した。これは次の必要性からである。本来、 x ， y ， z の結合確率密度関数から全母数を推定すべきであるがこの結合確率密度関数は非常に複雑なので実用的でない。
- ③ 提示した確率模型を実測資料に適用しこの確率模型の適用性を検証した。
- ④ 一雨ではなく一洪水に対する著者らの理論の適用性を検証した。

2. 一雨降雨の確率模型

(i) 一雨の定義 一雨は一洪水に対応するものと考え洪水到達時間程度の無降雨状態 (0 mm / hour) が続いたとき次の降雨は別の一雨に含まれるとする。この無降雨の継続時間を以後、無降雨継続時間とよぶ。貯留施設の有無の影響について考える。貯留施設による排水時間を考慮した場合、無降雨継続時間はさらに排水時間分だけ長くすべきである。本研究では、無降雨継続時間を1時間、3時間と定義する場合について検討した。

(ii) ハイエトグラフの近似 図-1のようにハイエトグラフは底辺を降雨継続時間 x ，高さをピーク雨量 y とする三角形に近似しその面積(斜線部)を総雨量 z とする。

y_B は y_B 以上の雨量を計画対象降雨としてみなす場合の基準雨量である。これを降雨原点 (mm / hour) とよぶ。解析では y_B 以下の降雨は無降雨として処理する。

(iii) 同時確率密度関数の誘導

$$x \text{ と } y \text{ の関係は } y = \zeta(x) \cdot \eta \quad (1)$$

$\zeta(x)$ は x に対する平均的な y の値を定める関数である。

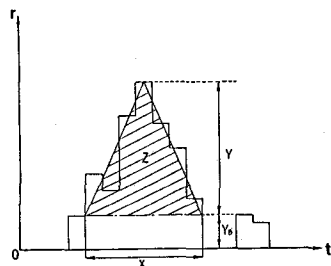


図-1 ハイエトグラフの近似

Akira M U R O T A , Takeharu E T O H and Hayao Y A N A G I M O T O

平均的な y の回りに y は分布する。このバラツキを η で表現する。y は x の増加に対して平均的には増加するがその増加率は逓減すると考えられる。よって $\zeta(x)$ を次式で表わす。

$$\zeta(x) = k_1 x^a \quad (0 \leq a \leq 1.0) \tag{2}$$

z は 図-1 より x と y の積に比例するものとして次式で表わす。

$$z = \frac{1}{2} k_2 x y = \xi(x) \cdot \eta \quad \xi(x) = \frac{1}{2} k_3 x^{1+a}, \quad k_3 = k_1 \cdot k_2 \tag{3}$$

$f_1(\quad), f_2(\quad), f_5(\quad), f_6(\quad)$ は、それぞれ x, η の確率密度関数、(x, y), (x, z) の結合確率密度関数を示す。x と η はガンマ分布に従うものとするれば、

$$f_1(x) = \frac{\beta_1^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1)} x^{\alpha_1-1} e^{-\beta_1 x} \quad f_2(\eta) = \frac{\beta_2^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2)} \eta^{\alpha_2-1} e^{-\beta_2 \eta} \tag{4}$$

このとき、x と y, x と z の結合確率密度関数は次式で表わされる。

$$f_5(x, y) = \frac{1}{\zeta(x)} f_1(x) f_2 \left\{ y / \zeta(x) \right\} \tag{5}$$

$$f_6(x, z) = \frac{1}{\xi(x)} f_1(x) f_2 \left\{ z / \xi(x) \right\} \tag{6}$$

3. 母数の推定方法と推定結果

母数推定方法には最尤法を用いた。x, y, z の結合確率密度関数より母数を推定すべきであるが非常に複雑で実用的でない。図-2 に示す手法を実測資料に適用し全母数を2段階に分けて推定した。図-2 中の L_1 は $f_1(x)$ の尤度関数である。 L_2 は $f_5(x, y)$ と $f_6(x, z)$ の積の尤度関数である。用いた資料を表-1 に示す。

図-2 の手法で推定した母数から求めたモーメントと実測資料より求めたモーメントの比較例を表-3 に示す。データの内容は例えば J1-0 の場合、J は7月の降雨資料を用いたことを示し無降雨継続時間が1時間、降雨原点が0であることを示す。表-3 より平均値については両者はよく一致している。表-4 に母数の推定結果を示す。

7, 8, 9, 10月に対して解析を行ったがここでは7月の母数推定結果を例示している。以下の知見は全ての月の母数推定結果から得られたものである。

表-1 資料の説明

地 点	期 間	内 容
大 阪	1900年～1965年(7～10月)	時間雨量 (mm/hr)

表-2 記号の説明

記 号	内 容
N	データ数
$\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$	X, Y, Z の平均
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	X, Y, Z の標準偏差

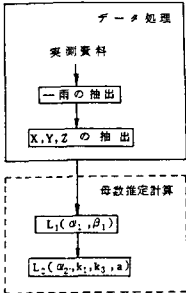


図-2 母数推定手順

表-3 母数より求めたモーメントと実測値より求めたモーメントの比較
上：実測モーメント
下：母数より求めたモーメント

Data	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{z}$	σ_x	σ_y	σ_z
J1-0	5.307	2.883	7.509	7.369	6.282	19.566
	4.659	2.710	8.440	4.177	7.377	37.753

表-4 母数推定結果 (降雨時系列)

Data	N	α_1	β_1	α_2	k_1	k_3	a
J1-0	1368	1.244	0.267	0.188	1.125	0.999	0.629
J3-0	1051	0.949	0.145	0.232	0.998	0.804	0.591
J1-1	702	0.953	0.377	0.972	4.010	8.002	0.327
J3-1	582	0.951	0.272	0.961	4.696	7.625	0.219
J1-5	276	1.231	0.829	0.903	7.126	17.628	0.265
J3-5	251	1.109	0.579	0.965	7.635	16.732	0.166
J1-10	139	1.905	1.810	0.839	8.965	25.536	0.065
J3-10	131	1.406	1.081	0.996	9.053	24.505	0.095

(i) $y_B = 0.0$ の場合

- ① α_1 の値は全体を通じて 0.9 ~ 1.3 である。形状母数 α_1, α_2 が 1.0 のときに x, y は指数分布に従う。よって x は指数分布かこれに近い分布に従うものと考えられる。
- ② α_2 は 0.2 前後で η の分布形は指数分布よりずっと歪の大きい逆 J 字型の分布に従う。
- ③ a の値は 0.456 ~ 0.634 である。0.5 付近の値をとるものと考えられる。これは降雨継続時間が n 倍になれば平均的なピーク雨量は $\sqrt{n}$ 倍になるという興味深い結果である。無降雨継続時間のとり方による母数の値の差は僅かである。

(ii) $v_B = 1.0 \sim 5.0$ の場合

- ① α_1, α_2 は共に全体を通して 1.0 に非常に近く x, η 共に指数分布かこれに近い分布に従う。
 ② $y_B = 1.0$ のときは a の値は $y_B = 0.0$ の場合に比べれば小さくなり 0.25 程度となった。
 $y_B = 5.0$ のときはさらに小さくほぼ 0.0 となった。

4. 実測資料と理論分布の比較

(i) 降雨継続時間の確率密度関数

降雨継続時間 x のヒストグラムと理論分布の比較を図-3に示す。これよりヒストグラムと理論分布は非常に良好な合致を示している。

(II) 降雨継続時間とピーク雨量の結合分布

実際の x と y の分布と、(5)式より得られる x と y の結合確率密度の等高線の関係を図-4に示す。

x, y, z を母数を用いて無次元化したものを X_*, Y_*, Z_* としている。縦軸に X_*, Y_* の結合確率密度をとった 3 次元図とそれより得られる等高線を図 5 に示す。

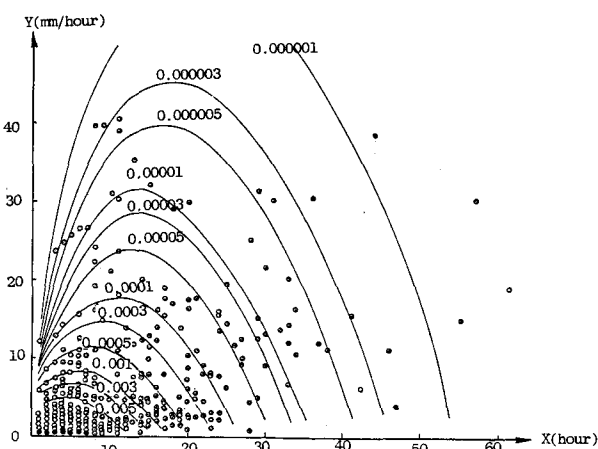


図-4 降雨継続時間とピーク雨量の分布(点)と結合確率密度の等高線の関係(J3-0)

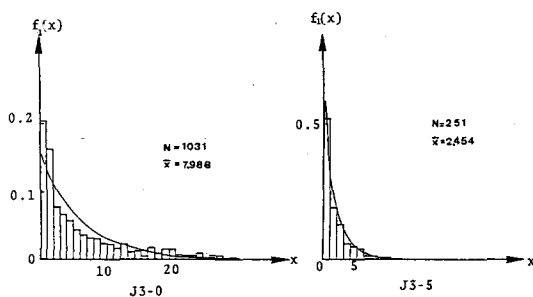


図-3 降雨継続時間のヒストグラムと理論分布の比較

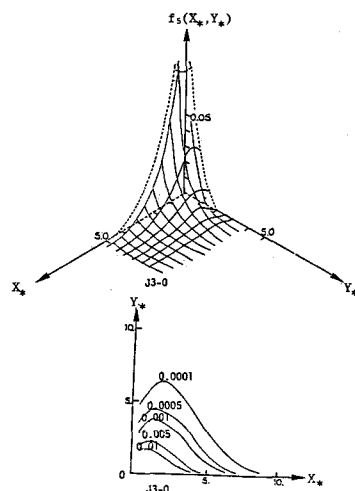


図-5 X_* , Y_* とその結合確率密度の3次元図及びその等高線

(Ⅲ) 降雨継続時間と総雨量の結合分布

A scatter plot with overlaid curves. The y-axis is labeled 'Z(mm)' and has major ticks at 0, 100, and 200. The x-axis is labeled 'X(hour)' and has major ticks at 0, 10, 20, 30, 40, 50, and 60. There are approximately 8 bell-shaped curves starting near the origin, peaking, and then declining. Each curve is labeled with a numerical value: 0.000001, 0.000005, 0.00001, 0.00003, 0.00005, 0.0001, 0.0003, and 0.0005. These values increase as the peak height of the curve increases. Numerous small black dots representing data points are scattered across the plot area, mostly concentrated below the peaks of the curves.

The figure consists of two parts. The top part is a 3D plot of the probability density function $f_0(x_u, z_u)$. The vertical axis represents the density, with a peak value of 0.005. The horizontal axes are x_u and z_u . The x_u axis ranges from -5.0 to 5.0, and the z_u axis ranges from 0 to 33.0. The surface is a bell-shaped peak centered at $x_u = 0$ and $z_u = 0$. The bottom part is a 2D line graph showing the same function for different values of z_u : 0.0005, 0.001, 0.005, and 0.01. The horizontal axis is x_u , ranging from -5.0 to 5.0. The vertical axis is z_u , ranging from 0 to 33.0. The curves show that as z_u increases, the peak of the distribution shifts to the right and becomes narrower and taller.

図-7 X_* , Z_* とその結合確率密度の
3次元図及びその等高線

実際には一雨降雨の確率模型ではなく流出時における

降雨から流量への変換方法

一ハイドログラフの確率模型を得ることが必要である。

総合貯留関数法 $s = 40.3q^{0.5}$

s: 流域の仮想貯留高(=)

 q ; 流出高 (mm/hr)

表-5 母数推定結果(流量時系列)

Data	N	α_1	β_1	α_2	k_1	k_3	a
FJ3-0	1031	2.910	0.196	0.608	0.206	0.153	0.561
FJ3-1	100	5.993	0.271	1.063	0.875	0.398	0.486

2.5 ~ 3.5 となった。

傾向があるが両者共に y_R が 0 の時は，ほぼ 0.5 である。

一洪水の場合の X_* , Y_* とその結合確率密度の 3 次元図とそ

れより描かれる等高線を図一5に示す。

3次元図及びその等高線
(流量時系列)

した。この確率模型を実測資料に適用し提示した確率模型の実

実測資料は徳島大学工学部 瑞野道夫助教授から頂きここに謝意を表わします。

II-38-4