最適断面形状へのアプローチ

京都大学工学部　正員　　小林　昭一
京都大学工学部　正員　　田村　武
京都大学工学部　学生員○仲山　公規

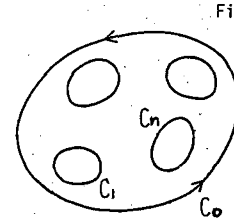
1、はじめに

最適設計において最適形状に関する問題は、重要であり、かつ基礎的である。本研究では、弾性棒のねじりをとりあげ、断面積が一定という条件を与えた時、どのような断面でねじり剛性が最大になるかという事を考える。ここでは、ねじり剛性を求めるのに有限要素法、また最適化には、Newton-Raphson法を用いて計算をした。

2、解析手法

純ねじりの状態において、基礎方程式は、次のPoisson方程式である。[1]

Fig.1



$$\Delta\Psi = -2 \qquad \text{-------}(1)$$

境界条件は

$$\left.\begin{aligned}\Psi &= 0 \quad \text{on } C_0\\ \Psi &= c_i \quad \text{on } C_i \quad (i=1,2,\cdots,n)\end{aligned}\right\} \text{-------}(2)$$

である。このΨはねじり応力関数またはPrandtl関数と呼ばれている。この時、ねじり剛性は次式で与えられる。

$$D = \mu\int 2\Psi\, dS + 2\mu\sum_{i=1}^{n} c_i S_i \qquad \text{------}(3)$$

μ：せん断弾性係数
S_i：孔の面積

ここで、弾性棒の断面上に原点をとり、そこから周辺曲線または孔縁曲線までの距離をx_iとすると、目的関数、制約条件（断面積一定）は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}&\text{object function} && D(x_1, x_2, \cdots, x_n) \longrightarrow \max\\ &\text{subject to} && g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = S\\ &&& a_i \leq x_i \leq b_i \quad (i=1,2,\cdots,n)\end{aligned}$$

よって　Lagrange関数は、$L(x,\lambda) = D(x) - \lambda(g(x) - S)$ となり、Newton-Raphson法を用いると解くべき連立方程式は次のようになる。[2]

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 D}{\partial x_1^2} - \lambda\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}, & \frac{\partial^2 D}{\partial x_1 \partial x_2} - \lambda\frac{\partial^2 g}{\partial x_1\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 D}{\partial x_1\partial x_n} - \lambda\frac{\partial^2 g}{\partial x_1\partial x_n} & -\frac{\partial g}{\partial x_1}\\ \frac{\partial^2 D}{\partial x_1\partial x_2} - \lambda\frac{\partial^2 g}{\partial x_1\partial x_2}, & \frac{\partial^2 D}{\partial x_2^2} - \lambda\frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}, & \cdots & \frac{\partial^2 D}{\partial x_2\partial x_n} - \lambda\frac{\partial^2 g}{\partial x_2\partial x_n} & -\frac{\partial g}{\partial x_2}\\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots\\ \frac{\partial^2 D}{\partial x_n\partial x_1} - \lambda\frac{\partial^2 g}{\partial x_n\partial x_1}, & \frac{\partial^2 D}{\partial x_n\partial x_2} - \lambda\frac{\partial^2 g}{\partial x_n\partial x_2}, & \cdots & \frac{\partial^2 D}{\partial x_n^2} - \lambda\frac{\partial^2 g}{\partial x_n^2} & -\frac{\partial g}{\partial x_n}\\ -\frac{\partial g}{\partial x_1} & -\frac{\partial g}{\partial x_2} & \cdots & -\frac{\partial g}{\partial x_n} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix}\Delta x_1\\ \Delta x_2\\ \vdots\\ \Delta x_n\\ \Delta\lambda\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{\partial D}{\partial x_1} + \lambda\frac{\partial g}{\partial x_1}\\ -\frac{\partial D}{\partial x_2} + \lambda\frac{\partial g}{\partial x_2}\\ \vdots\\ -\frac{\partial D}{\partial x_n} + \lambda\frac{\partial g}{\partial x_n}\\ g - S\end{bmatrix} \text{----}(4)$$

そして、制約条件の第２式に関しては、$\Delta x \geq 0$ であれば、$\alpha = \min\left(\frac{b_i - x_i'}{\Delta x_i}, 1\right)$ として

Shoichi Kobayashi . Takeshi Tamura Kiminori Nakayama

次のステップの値を $x_i^2 = x_i^1 + \alpha\Delta x_i$ で計算する。$\Delta x < 0$ であれば、$\alpha = \min\left(\frac{a_i - x_i^1}{\Delta x_i}, 1\right)$ とする。また、$x_i^1 = a_i$ の場合に、$\Delta x < 0$ で $a_i \leqq x_i \leqq b_i$ を乱す方向に進もうとする時は、式(4)のi行とi列を除いた方程式を解いて新しい方向ベクトル $(\Delta x_1, \Delta x_2, ---, \Delta x_{i-1}, 0, \Delta x_{i+1}, ---\Delta x_n, \Delta\lambda)$ を作り、次のステップへ進む。$x_i = b_i$ の時も同様である。今回収束判定は、各ステップの方向ベクトルの絶対値の和が、0.002よりも小さくなれば、収束したと判定する。また、ねじり剛性D(x)は、直接微分できないので、差分を用いている。

3、計算例

(1) 3変数の場合

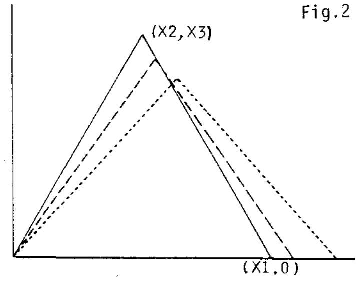


Fig.2

Fig.2のように変数 $x_1 \sim x_3$ をとり、計算を行なうと正三角形に収束した。Fig.3は、断面積を一定にして三角形の形状を変化させその時のねじり剛性の変化を調べたもので、直線は、3種類の初期値に対する収束の経路を示したものであるが、これからも正三角形でねじり剛性が最大になる事が分かる。

(2) 4変数の場合

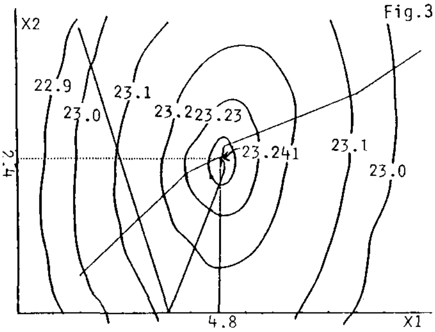


Fig.3

単連結領域の場合、正方形に収束した。また複連結領域で、周辺曲線を正方形に固定すると、孔縁曲線は正方形に収束する。また周辺曲線をFig.4のようにひし形に固定すると、横に長いひし形に収束する。

(3) 8変数の場合

Fig.5のように孔縁曲線を正八角形にすると、周辺曲線は正八角形に収束する。またFig.6のように、孔縁曲線を1辺の長さが2の正方形に固定すると、$x_1 = x_3 = x_5 = x_7 = 3.49$, $x_2 = x_4 = x_6 = x_8 = 3.45$ に収束する。

よって本研究の手法は、かなり有効であると思われるが、断面が偏平になった場合、有限要素法で、ねじり剛性を求める部分において誤差が生じやすい事に注意しなければならない。

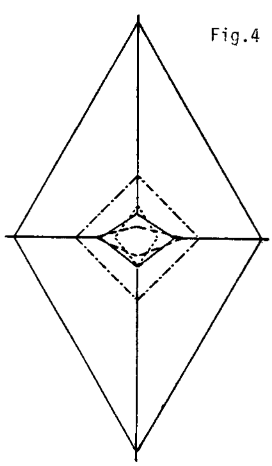


Fig.4

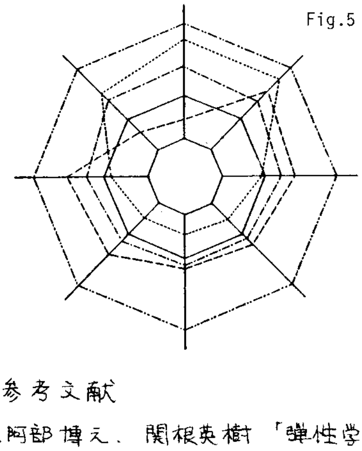


Fig.5

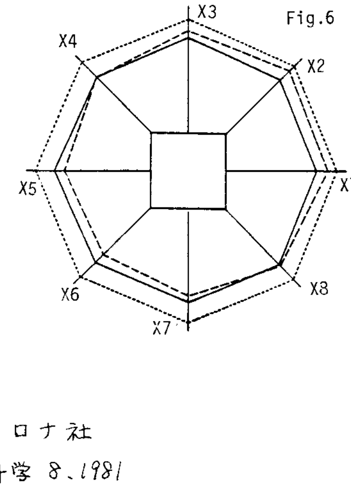


Fig.6

参考文献

1. 阿部博之、関根英樹「弾性学」コロナ社
2. 「Newton法の新しい登場」数理科学 8、1981