

固有関数による平板の弾塑性曲げ解析

横河橋梁 正員 〇三浦 芳雄
 大阪市立大学 正員 園田 恵一郎
 大阪市立大学 正員 小林 治俊

1. まえがき 従来半解析的な手法による弾塑性解析においては全周単純支持板に対するフーリエ二重級数を用いた解析は見られるが種々の境界条件を持つものに対しては未だ見当たらない。本研究では固有関数を用いることにより通常のフーリエ二重級数と同様な方法で各種の境界条件を持つ板の弾塑性曲げ解析が可能となることを示している。ここでは全周単純支持板および相対二辺が単純支持で他が固定辺を持つ矩形板の数値計算結果を示す。なお板のモーメント-曲率関係は Von Mises の降伏条件と塑性流れ法則に従うものを用いている。

2. モーメント-曲率関係 Von Mises の降伏条件より一般化された応力で表わした Loading Function は式(1)のようになる。また塑性流れ法則とフックの法則より弾塑性領域でのモーメント増分は式(2)のように表わされる。塑性流動をしている間すなわち $\mu > 0$ の場合は $F = 0$ を満足しなければならない。 $F(M_i + \dot{M}_i)$ をテイラー展開し M_i を M_0 に比して十分小さいとし二次項を無視すれば $\frac{\partial F}{\partial M_i} \cdot \dot{M}_i = 0$ となりこれより流れ係数 μ が得られて式(3)のようになる。以上より弾塑性領域でのモーメント-曲率関係を式(4)のように表わすことができる。

$$F = M_x^2 - M_x M_y + M_y^2 + 3M_{xy}^2 - M_0^2 \quad (1)$$

($M_0 = \sigma_0 h^2$, $2h$ は板厚, $\sigma_0 = \sqrt{3}k$)

$$\dot{M}_i = D_{ij} (\dot{K}_j - \mu \frac{\partial F}{\partial M_i}) \quad (2)$$

(D_{ij} : 弾性に対する剛性行列, μ : 流れ係数)

$$\mu = \frac{D_{ij} \frac{\partial F}{\partial M_i} K_j}{D_{ij} \frac{\partial F}{\partial M_i} \frac{\partial F}{\partial M_j}} \quad (3)$$

$$\dot{M}_i = (D_{ij} + \Delta D_{ij}) \dot{K}_j \quad (4)$$

3. 弾塑性構成方程式 モーメントのつり合い式 $\partial_i \dot{M}_i = \dot{q}$ ($\partial_i = -[\partial^2/\partial x^2, \partial^2/\partial x \partial y, \partial^2/\partial y^2]$, $\dot{q}$ は荷重増分) に式(4)を代入した増分を弾性成分 $\dot{w}_e$, 塑性成分 $\dot{w}_p$ に分ければ次のようになる。

$$D \Delta \Delta (\dot{w}_e + \dot{w}_p) = \dot{q} - \partial_i \Delta D_{ij} \partial_j (\dot{w}_e + \dot{w}_p) \quad (5)$$

弾性領域では $D \Delta \Delta \dot{w}_e = \dot{q}$ が成立する ($\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$)。塑性領域においては

$$D \Delta \Delta \dot{w}_p = -\partial_i \Delta D_{ij} \partial_j (\dot{w}_e + \dot{w}_p) = -\partial_i \Delta \dot{M}_i \quad (6)$$

となる。ここで $-\partial_i \Delta \dot{M}_i$ は釣り合い状態にある仮想荷重分布と考えることができる。

したがって塑性領域において式(6)を満足する解は板内の任意の点 (x, y) に集中荷重が作用する時の解を $W(x, y, \xi, \eta)$ とし塑性領域を R_p とすると次のように表わすことができる。

$$\dot{w}_p = - \iint_{R_p} \partial_i \Delta \dot{M}_i|_{x=\xi, y=\eta} W(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta \quad (7)$$

また仮想仕事の原理より次のように置き換えることができる。

$$\dot{w}_p = - \iint_{R_p} \Delta \dot{M}_i|_{x=\xi, y=\eta} \partial_i|_{x=y, y=\eta} W(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta \quad (8)$$

© Yoshio MIURA, Keiichiro SONODA, and Harutoshi KOBAYASHI

本研究では図-1に示すような矩形板を取り扱い、特に対称問題について考える。式(8)における積分はこの板を分割し各要素における M_i を線形分布と仮定することにより可能となる。

次にここで用いた固有関数は図-1において $x = \pm b/2$ で単純支持, $y = \pm b/2$ で単純支持および固定辺を有する板について考えそれぞれ SSSS 板, SCSC 板と略す。この固有関数は板の自由振動方程式;

$$\Delta W - (\lambda/b)^4 W = 0 \quad (9)$$

(W :変位, λ :固有値)より導びかれるもので上の境界条件を満たす対称モードの固有関数 $Y_{mn}(y) \cos \beta_m x$ の内容を表-1に示す。さらにこの固有関数は表-2に示す直交条件を有する。これらより板の基礎方程式 $\Delta W = q/D$ の解は次のように与えられる。

$$W = \frac{1}{D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_{mn}}{\lambda_{mn}^4} Y_{mn}(y) \cos \beta_m x \quad (10)$$

荷重係数 q_{mn} は直交条件を用いて次のようになる。

$$q_{mn} = \frac{2}{a X_{mn}} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-b/2}^{b/2} q(x, y) Y_{mn}(y) \cos \beta_m x dx dy \quad (11)$$

式(11)を用いて集中荷重解の q_{mn} を求め式(10)とともに式(8)に代入することにより次のような弾塑性解を得る。

$$\alpha_i \dot{W}_p = -\frac{4}{D} \frac{b^4}{a} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_{mn}}{\lambda_{mn}^4 X_{mn}} \Phi_{mn} \quad (12)$$

ここに M, N :板の分割数, $m, n = 1, 2, 3, \dots$, q_{mn} :曲率に関連した固有関数表示式, $\Phi_{mn} = \Delta M_i k [A_{ij} \varphi_{ijk}]$, $\Delta M_i k$:一要素における各接点の M_i , A_{ij} :積分に関連する座標の行列, φ_{ijk} :各要素における積分値を表わす関数式。

式(12)より面歪における $\alpha_i \dot{W}_p$ に関して繰り返し計算を行なうことにより塑性曲率増分を得る。

4 数値計算例

ここでは $a = b = 8$ (m) の正方形板が全面等分布荷重を受け, $M_0 = 3.2$ (kN) と仮定した。図-2, 図-3は SSSS 板および SCSC 板の荷重-たわみ曲線を表わしている。また図-4,

図-5は塑性領域の進展を表わしたものである。

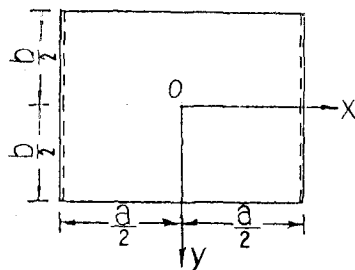


図-1 相対二辺が単純支持辺を持つ矩形板

表-1 固有関数と固有方程式

境界条件	固有関数 $Y_{mn}(y)$	固有方程式
SSSS	$\cos \frac{\lambda_2}{b} y$	$\cos \frac{\lambda_2}{2} = 0 \quad \therefore \lambda_2 = (2n-1)\pi$
SCSC	$\frac{\cosh \frac{\lambda_1}{b} y}{\cosh \frac{\lambda_1}{2}} - \frac{\cos \frac{\lambda_2}{b} y}{\cos \frac{\lambda_2}{2}}$	$\frac{\lambda_1 + \tanh \frac{\lambda_1}{2}}{\frac{\lambda_1}{2} + \tanh \frac{\lambda_1}{2}} + 1 = 0$

$$\lambda_1 = \sqrt{\lambda_{mn}^2 + (b\beta_m)^2}, \quad \lambda_2 = \sqrt{\lambda_{mn}^2 - (b\beta_m)^2}$$

表-2 直交条件

$$\int_{-b/2}^{b/2} Y_{mn} Y_{mi} dy \int_{-b/2}^{b/2} \cos \beta_m x \cos \beta_i x dx = \delta_{ij}^{mn} X_{ij}$$

$$X_{ij} = \frac{1}{2} \int_{-b/2}^{b/2} Y_{mn}^2 dy$$

$$\delta_{ij}^{mn} = \begin{cases} 0 & m \neq i \text{ あるいは } n \neq i \text{ の場合} \\ 1 & m = i \text{ かつ } n = i \text{ の場合} \end{cases}$$

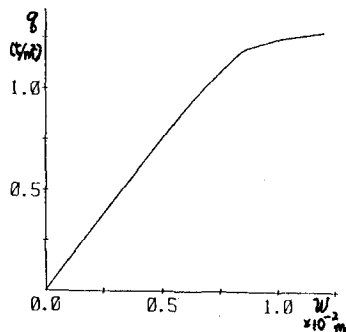


図-2 荷重-たわみ 曲線 (SSSS板)

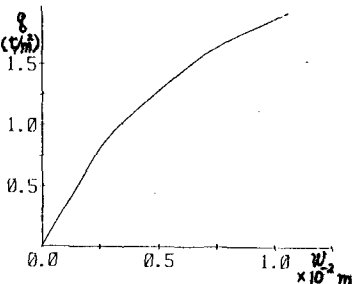


図-3 荷重-たわみ 曲線 (SCSC板)

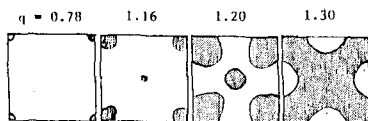


図-4 塑性領域の進展 (SSSS板)

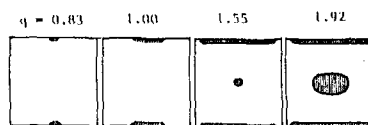


図-5 塑性領域の進展 (SCSC板)