

直交異方性多層弾性問題の一解析

京都市 正員 白鳥良一
 大阪市立大学 正員 園田恵一郎
 大阪市立大学 正員 堀川都志雄

1. まえがき 先に、3次元等弾性問題の解析に対して、著者らは伝達マトリックス法（はさみ込み法）と級数解法との併用法を提案し、小型計算機を用いて積層板等の多層問題の3次元弾性解析を行なった¹⁾。本研究では直交異方弾性体の変位関数にフーリエ変換を施し、数値的な逆変換により有限厚さをもつ無限板の解を誘導し、さらにこれと伝達マトリックス法（はさみ込み法）により直交異方性多層弾性問題の解法を試みるものである。

2. 有限厚さを持つ無限板のフーリエ変換

直交異方弾性体のフックの法則は次のように示される。 $\sigma = E \varepsilon$ ——— (1)

ここで、 $\sigma = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}^T$, $\varepsilon = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\}^T$, E : 弾性定数マトリックス

直交異方弾性体の変位関数 F_i ($i=1, 2, 3$) の基礎式および変位との関係式は次のように与えられる²⁾。

$$\nabla^2(x, y, z) F_i = -2B_i B_j / B_i B_j X_i \quad (i=1, 2, 3) \quad \text{ここで } \nabla^2(x, y, z) \text{ は微分演算子}$$

$$2B_i U = L_{1i} F_i, 2B_i V = L_{2i} F_i, 2B_i W = L_{3i} F_i \quad \text{ここで } L_{1i}, L_{2i}, L_{3i} \text{ は微分演算子} \quad \text{——— (2)}$$

有限厚さを持つ無限板に x, y 方向に対称荷重が作用する問題に対して、式(2)の変位関数は、

$$F_i = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} [C_1 \cosh \lambda z + C_2 \sinh \lambda z + (C_3 \cosh \lambda z + C_4 \sinh \lambda z) \cos \lambda z + (C_5 \cosh \lambda z + C_6 \sinh \lambda z) \sin \lambda z] \cos \lambda x \cos \lambda y \, d\lambda \, d\varphi \quad \text{——— (3)}$$

ここで、 λ_i ($i=1, 2, 3$)；式(2)の特性方程式の根、 $C_1, \dots, C_6$ ；無限板の上、下面での境界条件より決定される積分定数、 $\cosh \lambda z = \cosh \lambda z$, $\sinh \lambda z = \sinh \lambda z$

3. 伝達マトリックス法（はさみ込み法）¹⁾の概要

任意の層 i における上面の変位 $\bar{U}^i$ および応力 $\bar{X}^i$ は、下面の変位 $\bar{U}^i$ 、応力 $\bar{X}^i$ と第 i 層の格間行列によって次のように関係づけられる。

$$\begin{Bmatrix} \bar{U}^i \\ \bar{X}^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{U}^i \\ \bar{X}^i \end{Bmatrix} = L_i \begin{Bmatrix} \bar{U}^i \\ \bar{X}^i \end{Bmatrix} \quad \text{——— (4)} \quad \text{または} \quad \begin{Bmatrix} \bar{U}^i \\ \bar{X}^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{U}^i \\ \bar{X}^i \end{Bmatrix} = R_i \begin{Bmatrix} \bar{U}^i \\ \bar{X}^i \end{Bmatrix} \quad \text{——— (5)}$$

ここで、 $\bar{U} = [\bar{U}, \bar{V}, \bar{W}]^T$, $\bar{X} = [\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}]^T$, $\bar{U}, \bar{X}$: 変位 $\bar{U}$ および応力 $\bar{X}$ の $(n-1)$ 変換での係数

$\bar{U}, \bar{V}, \bar{W}$ は上面の x, y, z 方向の変位 また $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ は x, y, z 方向の接合面に働く伝達力

通常の伝達マトリックス法では式(4)あるいは(5)より始点および終点の状態ベクトルを決定した後、これらを用いて順次内点の状態ベクトルを計算する。一方、はさみ込み法は式(4)と(5)の両式より構成され、最上面と最下面で規定された境界量のみを用いて内点の状態ベクトルを求める方法である。

たとえば最上面で応力が、最下面で変位が規定される場合には次のような式が得られる。

$$\begin{Bmatrix} \bar{U} \\ \bar{X} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{U}_n \\ \bar{X}_0 \end{Bmatrix}, \quad \text{ここで } L = L_1 L_2 \cdots L_n = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix}, \quad R_i = R_n R_{n-1} \cdots R_{i+1} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \quad \text{——— (6)}$$



図-1. はさみ込み法

式(6)において $i=0,1,\dots,n$ と逐次 i を変化させて全格点における状態ベクトルを求める。

4. 数値計算例

剛基礎にある直交異方性多層無限板に対し従来の伝達マトリックス法とはさみ込み法を用いた結果の比較を表-1.に示す。基準値には単層板の値を用いる。作用する荷重は鉛直分布荷重(幅は2C)、全層厚と荷重幅との比を10、また弾性定数を一様($C_{11}=1, C_{12}=0.57, C_{13}=0.71, C_{22}=2.14, C_{33}=1.29, C_{44}=0.29, C_{55}=0.57, C_{66}=0.71$)²⁾ とする。

表-2.は、層数の変化による応力 σ_x の比較を示す。図-2.は、剛基礎にある多層無限板の弾性定数が最上層から最下層まで直線的に変化する場合の応力 σ_x, τ_{xz} の等高線を表わす。最下層の弾性定数は最上層の弾性定数の2倍とし、図中破線は弾性定数が一様な単層板の値を示す。

5. あとがき

○ 10層からなる直交異方性の多層問題に対して従来の伝達マトリックス法を用いた場合、単精度、倍精度演算のいずれでも伝達途上で誤差が増大しているが、はさみ込み法による単精度演算で十分精度の良い結果が得られた。

○ 弾性定数が増化する直交異方性多層弾性問題に対しても、文献1)で提案したはさみ込み法を用い、小型計算機で正確な値が得られるものと思われる。

表-1. 伝達マトリックス法とはさみ込み法による結果の比較

状態ベクトル	格点	伝達マトリックス法(10層)		はさみ込み法(10層)		はさみ込み法(50層)	
		単	倍	単	倍	単	単層板
w	0	0.7364	0.7359	0.7359	0.7359	0.7358	0.7358
	2	2.1E 04	0.3666	0.3665	0.3665	0.3665	0.3665
	4	8.4E 14	7.0E 05	0.1711	0.1711	0.1711	0.1711
	6	1.4E 26	9.7E 15	0.0793	0.0793	0.0793	0.0793
	8	2.9E 37	1.3E 26	0.0282	0.0282	0.0282	0.0282
	10	6.5E 48	1.7E 36	0.0	0.0	0.0	0.0
z	0	-0.5203	-0.5203	-0.5203	-0.5203	-0.5203	-0.5203
	2	1.8E 05	-0.2482	-0.2478	-0.2478	-0.2478	-0.2478
	4	5.6E 15	-5.2E 05	-0.0996	-0.0996	-0.0996	-0.0996
	6	8.4E 26	-5.1E 15	-0.0527	-0.0527	-0.0527	-0.0527
	8	1.8E 38	-7.9E 25	-0.0341	-0.0341	-0.0341	-0.0341
	10	4.1E 49	-1.1E 36	-0.0229	-0.0229	-0.0229	-0.0229

表-2. 各層における応力 σ_x/ρ の比較

層番号	10 層		30 層		50 層		倍精度		単層板	
	単	倍	単	倍	単	倍	単	倍	単	倍
1	-0.2131	-0.2130	-0.2130	-0.2130	-0.2130	-0.2130	-0.2130	-0.2130	-0.2130	-0.2130
2	-0.0878	-0.0879	-0.0878	-0.0878	-0.0878	-0.0878	-0.0878	-0.0878	-0.0878	-0.0878
3	-0.0229	-0.0228	-0.0228	-0.0228	-0.0228	-0.0228	-0.0228	-0.0228	-0.0228	-0.0228
4	-0.0024	-0.0024	-0.0024	-0.0024	-0.0024	-0.0024	-0.0024	-0.0024	-0.0024	-0.0024
5	-0.0025	-0.0025	-0.0025	-0.0025	-0.0025	-0.0025	-0.0025	-0.0025	-0.0025	-0.0025
6	-0.0027	-0.0027	-0.0027	-0.0027	-0.0027	-0.0027	-0.0027	-0.0027	-0.0027	-0.0027
7	-0.0018	-0.0018	-0.0018	-0.0018	-0.0018	-0.0018	-0.0018	-0.0018	-0.0018	-0.0018
8	-0.0016	-0.0016	-0.0016	-0.0016	-0.0016	-0.0016	-0.0016	-0.0016	-0.0016	-0.0016
9	-0.0003	-0.0003	-0.0003	-0.0003	-0.0003	-0.0003	-0.0003	-0.0003	-0.0003	-0.0003
10	-0.0015	-0.0015	-0.0015	-0.0015	-0.0015	-0.0015	-0.0015	-0.0015	-0.0015	-0.0015
	-0.0037	-0.0037	-0.0037	-0.0037	-0.0037	-0.0037	-0.0037	-0.0037	-0.0037	-0.0037
	-0.0037	-0.0037	-0.0037	-0.0037	-0.0037	-0.0037	-0.0037	-0.0037	-0.0037	-0.0037
	-0.0063	-0.0063	-0.0063	-0.0063	-0.0063	-0.0063	-0.0063	-0.0063	-0.0063	-0.0063

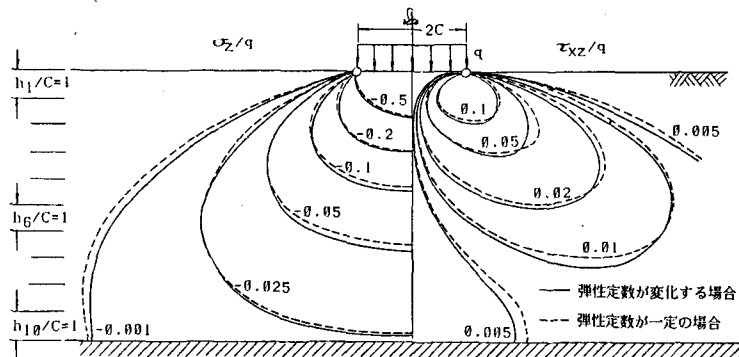


図-2. 弾性定数の変化する多層問題での応力 $\sigma_x/\rho, \tau_{xz}/\rho$ の等高線

【参考文献】 1) 園田恵一郎、堀川都志雄、白鳥良一；3次元弾性問題に対する伝達マトリックス——級数解法の適用，土木学会論文報告集，第339号，pp.41~50，1983年11月

2) Sonoda, K. and Horikawa, T.; Displacement Functions for an Orthotropic Elastic Body and their Applications to Thick Plate Problems, Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 29, p.117-126, 1979