

弾性波動の逆問題に関する研究

京都大学工学部 正員 丹羽義次

京都大学工学部 正員 廣瀬壮一

京都大学工学部 学生員 喜多秀樹

1. はじめに

従来より、弾性体の物性値を与えて、波動の伝播特性を明らかにする問題は数多く解析されてきた。そのような問題を「順問題」と言うことにするならば、逆に、得られた波動を解析し、弾性体内に存在する物質の形状、及びその物性量を求める問題はその逆問題と言える。

本研究は積分方程式法による逆問題の解析の第一歩として、異質物(Inclusion)が無限均質弾性体内に存在するモデルについて、その散乱波からInclusionの形状、ならびに特性を明らかにしようと試みるものである。

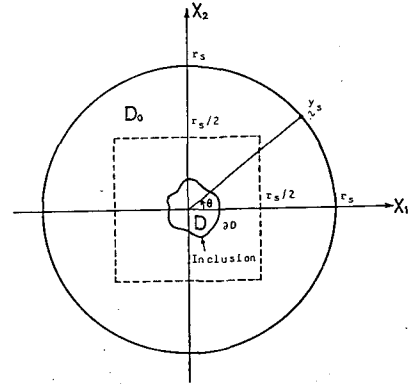


Fig.1 Inclusionと観測円

2. 解析モデル (Fig.1 参照)

- i) 基盤 D_0 は無限均質等方弾性体であり、そのせん断剛度を μ_0 、密度を ρ_0 とする。
 - ii) 基盤 D_0 内にせん断剛度の異なる均質等方弾性体 D (Inclusion) が存在し、そのせん断剛度を μ 、密度を ρ とする。
 - iii) 2次元定常面外波動(SH波)問題についてとり扱う。
 - iv) 入射波 u^i は点 y_0 における集中物体力と震源とする球面波である。ただし、点 y_0 は Inclusion D を囲み、その大きさより十分大きいと思われる半径 r_0 の円上にあるものとする。
 - v) 震源と同じ点 y_0 で散乱波を観測するものとする。
 - vi) 基盤 D_0 と Inclusion D の境界 ∂D において、変位、及び応力ベクトルは連続である。
- 以上の仮定、及びモデル化のもとで、境界積分方程式法により、点 y_0 における散乱波変位 $u^s(y_0)$ を数値的に求め、逆問題への入力データとした。

3. 逆問題としての定式化

まず、せん断剛度と密度を、 $\mu(x) = \mu_0 + \mu_1$ 、 $\rho(x) = \rho_0 + \rho_1$ と表す。ただし、 μ_1 、 ρ_1 はそれぞれ μ_0 、 ρ_0 からの増分である。そして、散乱波変位 $u^s(y_0)$ の満たす基礎式に、動弾性の式を満たす基本解 $U(y_0, y)$ を用いて積分方程式を構成し、さらに発散定理、境界条件等を用いて式の変形を進めると、次の積分方程式が得られる。

$$u^s(y_0) = - \int_D \mu_0 \nabla_r U(y_0, y) \nabla_r u^s(y_0) dS_r + \int_D U(y_0, y) \rho_1 \omega^2 u(y) dS_r \quad (1)$$

4. Farfield 近似、Born 近似、及び特性関数の導入

①式を逆問題として解析するために、 $|y_0| = r_0 \gg |y|$ と仮定すれば、 $|y_0 - y| = |y_0| - \hat{y}_0 \cdot y$ と近

似できる。ただし、 $\hat{e}$ は単位ベクトルを表す。(Farfield 近似) また、Inclusion D 内では $u(y) \cong u^i(y)$ と近似する。

ただし、 u は全変位を表す。(Born 近似)

さらに簡単のために、密度の増分 $\rho \cong 0$ とすれば、

$$\textcircled{1} \text{式は、} u^s(y_s) = \frac{\mu_c}{8\pi\mu_0 r_s} e^{i(2kr_s - \frac{1}{2}\pi)} \cdot \int_D e^{-i(2k\hat{y}_s) \cdot y} dS_y \text{---}\textcircled{2}$$

となる。ここで、 $\delta(X) = 1 (X \in D), 0 (X \in D_0)$ なる場所

の関数を定義し、(これを特性関数と呼ぶ) このフーリエ変換を考えることにより、 $\gamma(X)$ は $u^s(y_s)$ を用いて次のように表すことができる。

$$\frac{\mu_c}{\mu_0} \delta(X) = \frac{g}{\pi} r_s e^{\frac{1}{2}i\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty e^{-2ikr_s} \cdot u^s(y_s) e^{i2k(X_1 \cos\theta + X_2 \sin\theta)} \cdot dk d\theta \text{---}\textcircled{3}$$

ただし、 $2k\hat{y}_s = (2k\cos\theta, 2k\sin\theta)$ の関係の下で座標変換を行った。

従って、散乱波 u^s を式 $\textcircled{3}$ に代入して積分する事により、Inclusion D 内では、値 μ_c/μ_0 、D 内では、値 0 をもつ特性関数 $\mu_c/\mu_0 \delta(X)$ が求められ、D の形状とせん断剛度が明らかになる。

5. 数値解析例と結果、考察

Fig.2 のように D が円形で、その中心が原点と一致する場合については、明らかに r_s の円上のどの点についても同じ散乱波が得られるので、横軸に原点からの距離 $\sqrt{X_1^2 + X_2^2}$ 、縦軸に $\mu_c/\mu_0 \delta(X)$ をとり、各パラメタが特性関数に与える影響を調べた。その結果の一例を、Fig.3 ~ Fig.5 に示した。なお、破線は求められるべき特性関数の形を示す。結果として最も注目すべきことは、 $0.5 < \mu_c/\mu_0 < 2.0$ 程度の範囲でのみ $\gamma(X)$ がうまく描け、その他ではよい結果は得られないという事である。これは Born 近似において $u(y) \cong u^i(y)$ としたためと思われる。Farfield 近似に関しては、 y_s を Inclusion D にかなり近づけても、ある程度の結果が得られる事が明らかになった。

また、Inclusion D の形が円である場合の $\mu_c/\mu_0 \delta(X)$ の分布の一例を Fig.6 に示す。

参考文献

- 1) Norman Bleistein: Direct image reconstruction of anomalies in a plane via physical optics farfield inverse scattering, J. Acoust. Soc. Am. Vol. 59, No.6, pp1259-1262, 1976.

Fig. 6 Characteristic Function (ellipse)

$\mu_c/\mu_0 = 0.7, \alpha = 0.5$

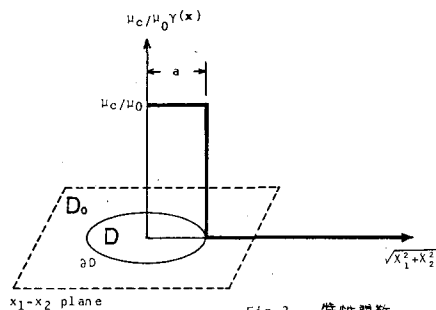


Fig. 2 特性関数

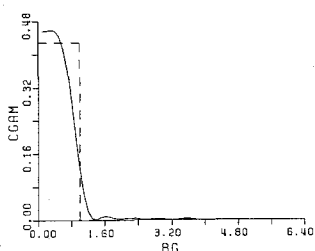


Fig. 3 Characteristic Function

real = 0.42857 $\mu_c/\mu_0 = 0.7$
mean = 0.43535 $r_s/a = 5.0$
max = 0.45841 $k = 0.1 \sim 5.0$

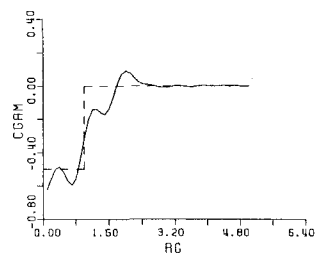


Fig. 4 Characteristic Function

real = 0.50000 $\mu_c/\mu_0 = 2.0$
mean = 0.53961 $r_s/a = 5.0$
min = 0.61960 $k = 0.1 \sim 5.0$

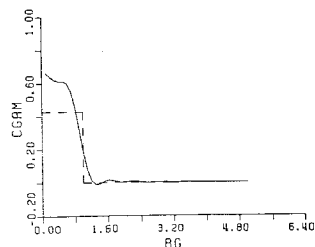


Fig. 5 Characteristic Function

real = 0.42857 $\mu_c/\mu_0 = 0.7$
mean = 0.61425 $r_s/a = 1.5$
max = 0.66291 $k = 0.1 \sim 5.0$

