非均質弾性体における波動解析について

京都大学工学部　正員　丹羽義次
同上　正員○廣瀬壮一

はじめに

積分方程式法は、弾性波動問題の一解析法として、広範な適用性を示しており、均質弾性体のみならず、非均質弾性体の解析も行われるようになってきた。そこで、本報告は、非均質弾性体に対する積分方程式法の2つの定式化を示し、その両者の比較検討を行うものである。

問題の設定

Fig.1に示すような弾性波動の散乱問題を考えることにする。境界∂Dで囲まれた領域D^-は、弾性定数C_{ijkl}、密度ρを有する非均質弾性体（C_{ijkl}, ρは、定数ではなく、場所の関数である）であり、均質な無限弾性体D^+の中にあるとする。また、D^+の弾性定数と密度は、C^0_{ijkl}, ρ^0（共に定数）で与えられていると仮定する。この時、定常状態における運動方程式は、次のようになる。

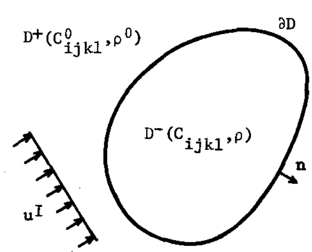

Fig. 1 Domains, boundary and normal vector

$$(C_{ijkl}(\underline{X})u_{k,l}(\underline{X}))_{,j}+\rho(\underline{X})\omega^2u_i(\underline{X})=0\qquad \underline{X}\ \text{in}\ D^-\qquad(1)$$

$$\Gamma_{ij}u_j(\underline{X})\equiv C^0_{ijkl}u_{k,lj}(\underline{X})+\rho^0\omega^2u_i(\underline{X})=0.\qquad \underline{X}\ \text{in}\ D^+\qquad(2)$$

ただし、u_i, ωはそれぞれ変位、角周波数である。また、境界∂Dにおいて、変位とtractionが連続であると仮定するならば、次式が成り立つ。

$$u_i^+(\underline{x})=u_i^-(\underline{x}),\quad t_i^+(\underline{x})=t_i^-(\underline{x})\qquad \underline{x}\ \text{on}\ \partial D\qquad(3)$$

ただし、$t_i\equiv\overset{n}{\Sigma}_{ij}u_j\equiv C_{ikjl}n_ku_{j,l}$であり、上指標＋と－は、それぞれ、領域$D^+$、$D^-$からの極限値であることを示す。さらに、無限領域$D^+$における散乱波$u_i^S(=u_i-u_i^I$, u_i^Iは入射波)は、無限遠において、放射条件を満足するものとする。

静弾性基本解を用いた定式化（定式化Ⅰ）

まず、非均質弾性体D^-におけるC_{ijkl}を次のように一定部分C^*_{ijkl}と変動部分$C^\dagger_{ijkl}$に分ける。

$$C_{ijkl}(\underline{X})=C^*_{ijkl}+C^\dagger_{ijkl}(\underline{X})\qquad \underline{X}\ \text{in}\ D^-\qquad(4)$$

式(4)を式(1)に代入し、整理すると、

$$\Xi_{ij}u_j(\underline{X})\equiv C^*_{ijkl}u_{k,lj}(\underline{X})=-\{(C^\dagger_{ijkl}(\underline{X})u_{k,l}(\underline{X}))_{,j}+\rho(\underline{X})\omega^2u_i(\underline{X})\}\qquad \underline{X}\ \text{in}\ D^-\qquad(5)$$

となる。ここで、次式で定義される静弾性基本解$U_{ij}(\underline{X},\underline{Y})$を考える。

$$\Xi_{ki}U_{ij}(\underline{X},\underline{Y})=-\delta_{kj}\delta(\underline{X}-\underline{Y})\qquad(6)$$

式(5)の右辺を静弾性問題における物体力とみなして、領域D^-に対して積分方程式を構成するならば、次式を得る。

$$\int_{\partial D}[U_{ij}(\underline{X},\underline{Y})t_j(\underline{Y})-T_{ij}(\underline{X},\underline{Y})u_j(\underline{Y})]\,dS_Y+\int_{D^-}(U^{,m}_{ij}(\underline{X},\underline{Y})C^\dagger_{jmkl}(\underline{Y}))^{,l}u_k(\underline{Y})\,dV_Y$$
$$+\omega^2\int_{D^-}U_{ij}(\underline{X},\underline{Y})\rho(\underline{Y})u_j(\underline{Y})\,dV_Y=\begin{cases}e_{ij}(\underline{X})u_j(\underline{X}) & \underline{X}\ \text{in}\ D^- & (7.a)\\ e'_{ij}(\underline{x})u_j(\underline{x}) & \underline{X}=\underline{x}\ \text{on}\ \partial D & (7.b)\\ 0 & \underline{X}\ \text{in}\ D^+ & (7.c)\end{cases}$$

Yoshiji NIWA and Sohichi HIROSE

ただし、$T_{ij} \equiv U_{ik} \Sigma_{jk}^{n_y}$、$e_{ij}$, e'_{ij} は、2重層ポテンシャルの free term である。一方、均質弾性体 D^+ に対する積分方程式は、Green の公式により、

$$-\int_{\partial D} [S_{ij}(\underset{\sim}{X}, \underset{\sim}{y}) t_j(\underset{\sim}{y}) - D_{ij}(\underset{\sim}{X}, \underset{\sim}{y}) u_j(\underset{\sim}{y})] \, dS_y + u_i^I(\underset{\sim}{X}) = \begin{cases} 0 & \underset{\sim}{X} \text{ in } D^- \quad (8.a) \\ \varepsilon_{ij}(\underset{\sim}{x}) u_j(\underset{\sim}{x}) & \underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{x} \text{ on } \partial D \quad (8.b) \\ u_i(\underset{\sim}{X}) & \underset{\sim}{X} \text{ in } D^+ \quad (8.c) \end{cases}$$

となる。ただし、ε_{ij} は2重層ポテンシャルの free term であり、また、S_{ij} は次式を満たす動弾性基本解である。

$$\Gamma_{ki} S_{ij}(\underset{\sim}{X}, \underset{\sim}{Y}) = -\delta_{kj} \delta(\underset{\sim}{X} - \underset{\sim}{Y}) \qquad (9)$$

また、$D_{ij} \equiv S_{ik} \Sigma_{jk}^{y}$ である。式(7.a.b)と式(8.b)は、境界 ∂D における連続条件、式(3)によって結合され、積分を離散化することによって数値的に解くことができる。

<u>動弾性基本解を用いた定式化(定式化II)</u>　　上述の非均質弾性体 D^- に対する定式化では静弾性基本解 U_{ij} を用いたが、ここでは、動弾性基本解 S_{ij} を用いた定式化を試みる。D^- における C_{ijkl}, ρ を次のように2つの部分に分ける。

$$C_{ijkl}(\underset{\sim}{X}) = C_{ijkl}^0 + \bar{C}_{ijkl}(\underset{\sim}{X}), \quad \rho(\underset{\sim}{X}) = \rho^0 + \bar{\rho}(\underset{\sim}{X}) \qquad \underset{\sim}{X} \text{ in } D^- \qquad (10)$$

式(10)を式(1)に代入して、整理すると、次のようになる。

$$\Gamma_{ij} u_j(\underset{\sim}{X}) = -\{ (\bar{C}_{ijkl}(X) u_{k,l}(\underset{\sim}{X}))_{,j} + \bar{\rho}(\underset{\sim}{X}) \omega^2 u_i(\underset{\sim}{X}) \} \qquad \underset{\sim}{X} \text{ in } D^- \qquad (11)$$

前と同様、式(11)の右辺を動弾性問題における物体力とみなして、領域 D^- に対して、積分方程式を構成すると、

$$\int_{\partial D} [S_{ij}(\underset{\sim}{X}, \underset{\sim}{y}) t_j(\underset{\sim}{y}) - D_{ij}(\underset{\sim}{X}, \underset{\sim}{y}) u_j(\underset{\sim}{y})] dS_y - \int_{\partial D} S_{ij}^{,m}(\underset{\sim}{X}, \underset{\sim}{y}) \bar{C}_{jmkl}(\underset{\sim}{y}) n_l(\underset{\sim}{y}) u_k(\underset{\sim}{y}) dS_y + \int_{D^-} (S_{ij}^{,m}(\underset{\sim}{X}, \underset{\sim}{Y}) \bar{C}_{jmkl}(\underset{\sim}{Y}))^{,l} u_k(\underset{\sim}{Y}) dV_Y$$
$$+ \omega^2 \int_{D^-} S_{ij}(\underset{\sim}{X}, \underset{\sim}{Y}) \bar{\rho}(\underset{\sim}{Y}) u_j(\underset{\sim}{Y}) dV_Y = \begin{cases} e_{ij}(\underset{\sim}{X}) u_j(\underset{\sim}{X}) & \underset{\sim}{X} \text{ in } D^- \quad (12.a) \\ e'_{ij}(\underset{\sim}{x}) u_j(\underset{\sim}{x}) & \underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{x} \text{ on } \partial D \quad (12.b) \\ 0 & \underset{\sim}{X} \text{ in } D^+ \quad (12.c) \end{cases}$$

となる。一方、領域 D^+ に対する積分方程式は、定式化Iにおける式(8)と同じ式になるので、連続条件、式(3)を考慮して、式(8)と式(12)を加えれば、次式を得る。

$$-\int_{\partial D} S_{ij}^{,m}(\underset{\sim}{X}, \underset{\sim}{y}) \bar{C}_{jmkl}(\underset{\sim}{y}) n_l(\underset{\sim}{y}) u_k(\underset{\sim}{y}) dS_y + \int_{D^-} (S_{ij}^{,m}(\underset{\sim}{X}, \underset{\sim}{Y}) \bar{C}_{jmkl}(\underset{\sim}{Y}))^{,l} u_k(\underset{\sim}{Y}) dV_Y$$
$$+ \omega^2 \int_{D^-} S_{ij}(\underset{\sim}{X}, \underset{\sim}{Y}) \bar{\rho}(\underset{\sim}{Y}) u_j(\underset{\sim}{Y}) dV_Y + u_i^I(\underset{\sim}{X}) = \begin{cases} e_{ij}(\underset{\sim}{X}) u_j(\underset{\sim}{X}) & \underset{\sim}{X} \text{ in } D^- \quad (13.a) \\ (e'_{ij}(\underset{\sim}{x}) + \varepsilon_{ij}(\underset{\sim}{x})) u_j(\underset{\sim}{x}) & \underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{x} \text{ on } \partial D \quad (13.b) \\ u(\underset{\sim}{X}) & \underset{\sim}{X} \text{ in } D^+ \quad (13.c) \end{cases}$$

上式(13.a.b)は、積分を離散化して、数値的に解くことができる。

<u>両定式化の比較検討</u>　　上述の定式化より明らかなように、定式化Iによれば、式(7)と式(8)を連続条件、式(3)のもとで、結合して解かなければならない。一方、定式化IIでは、すでに結合された積分方程式(13)が得られ、境界 ∂D 上における traction t_i は消去され、もはや、未知数として残っていない。この意味では、定式化IIの方が、解くべき方程式の数が少なく有利である。しかしながら、次のことに注意しなければならない。式(8), (13)においては、動弾性基本解 S_{ij} の中に周波数 ω が含まれているのに対し、式(7)の積分項は、いずれも周波数 ω に無関係である。したがって、地震動解析のように、数多くの周波数に対して解を求める必要がある時には、式(7)の積分項は一度計算して、記憶させておけば良く、定式化Iの方が有利になると思われる。具体的な数値解析例については、当日発表する予定である。