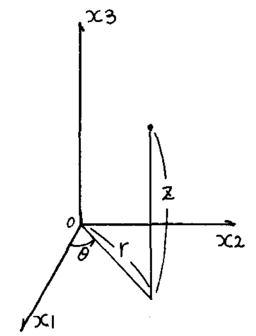
# 軸対称構造物の積分方程式法による解析

福井大学工学部　正　員　　福井　卓雄
福井大学大学院　学生員　○北村　康孝

本報告では　境界積分方程式を用いた軸対称弾性体の解析について述べる。軸対称弾性体の境界上に分布させた一重層密度と，境界上で規定された変位(荷重)とを周方向にFourier展開すると，それらの係数関数の間には項別に独立な積分関係式が得られる。従って与えられた境界条件を周方向にFourier展開し，各項ごとに積分方程式を解いてそれらの解を重ね合せることにより軸対称弾性体の非軸対称問題の解が得られる。

## Fourier展開による項別積分





軸対称弾性体中の変位$U(x)$が境界上に分布した密度$P$による一重層ポテンシャルにより表されると仮定する。

$$U_i(\bar{x}) = \int_{\partial B} G_{ij}(\bar{x};\bar{y})\, P_j(\bar{y})\, dS_y \qquad (1)$$

ここに　$G_{ij}$はKelvin核であり，添字$ij$は通常の直交座標成分を示すために用いた。軸対称問題を扱い易くするため，右図の様に円柱座標系をとる。直交変換行列$Q_{Ki}(\theta)$を用い，(1)式を円柱座標成分で表せば，

$$U_K(\bar{x}) = Q_{Ki}(\theta)\int_{\partial B} G_{ij}(\bar{x};\bar{y})\, Q_{Lj}(\varphi)\, P_L(\bar{y})\, dS_y \quad , \qquad [Q_{Ki}(\theta)] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

である。大文字の添字は円柱座標成分(物理成分)を表す，また以下では点$\bar{x}$：$(x_1, x_2, x_3)$について$(r, \theta, z)$，点$\bar{y}$：$(y_1, y_2, y_3)$について$(\rho, \varphi, \zeta)$と取った。
密度$P$のFourier展開，

$$P_L(\bar{y}) = \frac{1}{2}P_L^{(0)}(y) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[P_L^{(n)}(y)\cdot\cos n\varphi + \tilde{P}_L^{(n)}(y)\cdot\sin n\varphi\right] \qquad (3)$$

を用いて(2)式を表すと

$$U_K(\bar{x}) = Q_{Ki}(\theta)\int_{\partial B}\left[\frac{1}{2}G_{iL}^{(0)}(\bar{x};y)\cdot P_L^{(0)}(y) + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{G_{iL}^{(n)}(\bar{x};y)\, P_L^{(n)}(y) + \tilde{G}_{iL}^{(n)}(\bar{x};y)\cdot\tilde{P}_L^{(n)}(y)\right\}\right] ds_y \qquad (4)$$

ここに．

$$G_{iL}^{(n)}(\bar{x};y) = \int_0^{2\pi} G_{ij}(\bar{x};\bar{y})\cdot Q_{Lj}(\varphi)\cos n\varphi\,\rho\, d\varphi \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

$$\tilde{G}_{iL}^{(n)}(\bar{x};y) = \int_0^{2\pi} G_{ij}(\bar{x};\bar{y})\cdot Q_{Lj}(\varphi)\sin n\varphi\,\rho\, d\varphi \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

であり，点$\bar{x}$，$\bar{y}$に対して，点$x$，$y$はそれぞれ$(r, z)$，$(\rho, \zeta)$面内の点を表す。したがって(4)式の$\partial B$は$(\rho, \zeta)$面内の境界であり，$ds_y$はその線素である。

Takuo FUKUI , Yasutaka KITAMURA

(4)式の左辺$U_K$の周方向でのFourier展開 $U_K(\bar{x})=\frac{1}{2}U_K^{(0)}(x)+\sum_{n=1}^{\infty}[U_K^{(n)}(x)\cos n\theta+\tilde{U}_K^{(n)}(x)\sin n\theta]$を考え，そのFourier係数を求めると異なる次数の連成する項は消去され，次の一群の積分関係式を得る。

$$U_K^{(n)}(x)=\int_{\partial B}\Gamma_{KL}^{(n)}(x;y)\cdot P_L^{(n)}(y)ds_y \quad , \quad \tilde{U}_K^{(n)}(x)=\int_{\partial B}\tilde{\Gamma}_{KL}^{(n)}(x;y)\cdot\tilde{P}_L^{(n)}(y)ds_y \qquad (5)$$

ここに $\Gamma_{KL}^{(n)}(x;y)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}Q_{Ki}(\theta)\cos n\theta\, G_{iL}^{(n)}(\bar{x};y)d\theta$ , $\tilde{\Gamma}_{KL}^{(n)}(x;y)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}Q_{Ki}(\theta)\sin n\theta\,\tilde{G}_{iL}^{(n)}(\bar{x};y)d\theta$

［（連成項の消去できる理由）：一般に $Q_{Ki}(\theta)Q_{Lj}(\varphi)G_{ij}(\bar{x};\bar{y})$ は $\theta,\varphi$に関して$\cos k(\theta-\varphi)$，($k=0,1,2,\cdots$) だけを含む。(4)式から(6)式への誘導の過程に現れる$\theta,\varphi$に関する積分，$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos k(\theta-\varphi)\cos m\theta\cos n\theta\, d\theta d\varphi$ は $m=n$のとき，すなわち非連成項のとき以外は，値を持たない。他の連成項についても同様である。］

境界応力の成分についても(5)式と同様の式を導くことができる。結局 非軸対称問題をそのFourier係数関数について積分方程式に帰着することができる。

核$\Gamma_{KL}^{(n)}(x;y)$，$\tilde{\Gamma}_{KL}^{(n)}(x;y)$ の評価

$\Gamma_{KL}^{(n)}(x;y)$と$\tilde{\Gamma}_{KL}^{(n)}(x;y)$は一般に $I=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}(|\bar{x}-\bar{y}|)^{-1}\cos n(\theta-\varphi)d\theta d\varphi$ またはその$\bar{x}$方向の偏導関数で表現できる。よく知られた公式，

$$\frac{1}{|\bar{x}-\bar{y}|}=\int_0^{\infty}\exp(-|z-\zeta|s)\,J_0(s\sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\theta-\varphi)})ds$$

$$J_0(s\sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\theta-\varphi)})=J_0(sr)J_0(s\rho)+2\sum_{m=1}^{\infty}J_m(sr)J_m(s\rho)\cos m(\theta-\varphi)$$

より積分は，

$$I=4\pi^2\int_0^{\infty}\exp(-|z-\zeta|s)\,J_n(sr)J_n(s\rho)\,ds$$

となる。この積分はポテンシャルの分野ではよく知られており，一般に完全楕円積分を用いて表すことができる。

解析例：均一な内圧Pを受ける有限な厚肉円筒