積分方程式法の最近の動向

京都大学工学部　正員　小林昭一

1. はじめに

場の初期値・境界値問題を積分方程式に定式化して，数値解析的に解く方法は，一般に積分方程式法と呼ばれる。特に，同次な微分方程式で表される線型場は，境界条件と共に境界上の積分だけを含むように定式化できる。これによる解法を"境界積分方程式法"(BIEM)と呼ぶことも多い。積分方程式法では，積分の評価，特に境界積分を精度よく求めることが重要である。境界積分は通常境界を有限個の要素に分割して，有限要素法などを適用して区分的に評価される。この技法に因んで BIEM は，"境界要素法"(BEM)とも呼ばれる。

BEM は，最近急速に発展し，毎年国際会議が開かれるような状況であり，広範な分野の数多くの研究者の関心を集めているようである。本稿では，土木工学分野に関連した BIEM の最近の動向を概観したい。なお，詳細は文献 1),2) を参照されたい。

2. 積分方程式への定式化

積分方程式の定式化は Betti の相反定理あるいは Green の才2公式に基礎を置いている。時空領域での定式化は，動的な相反定理を適用する。この際には，時間は convolution 積分で表すと便利である。動弾性とか熱伝導などの時間依存の問題は，Fourier 変換とか Laplace 変換を適用して，楕円型の問題として積分方程式に定式化されることも多い。積分変換された像空間での積分方程式は，弾性とかポテンシャル問題と同様な定式化により得られる。なお，動弾性問題では，放射条件（無限遠からは波は反射して来ない条件）が設定される。積分方程式の定式化は，例えば次のように行なわれる。Green 公式と基本解

$$\int_D (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{L}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{L}^*\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u})\,dv = \int_{\partial D} (\boldsymbol{v}\cdot\overset{n}{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{u} - \overset{n}{\boldsymbol{T}}{}^*\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u})\,ds\ ,\qquad \boldsymbol{L}\boldsymbol{U} = -\boldsymbol{I}\delta \quad (\text{記号の説明は省略})$$

を用いると，外部領域に対しては Somigliana 式

$$\varepsilon(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \int_{\partial D} (\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{t}(\boldsymbol{y}))\,ds_y\ ,\quad \varepsilon(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 & \boldsymbol{x}\in D \\ 0 & \boldsymbol{x}\in D_c \end{cases},\quad \boldsymbol{W} = \boldsymbol{U}\cdot\overset{n}{\boldsymbol{T}}_y$$

を得，さらに極限 $D_c \ni \boldsymbol{x} \longrightarrow \boldsymbol{x}_0 \in \partial D$ を取ることにより，次の積分方程式を得る。

$$-\boldsymbol{c}^i\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_0) = \fint_{\partial D} \boldsymbol{W}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y})\,dS_y - \int_{\partial D} \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{t}(\boldsymbol{y})\,dS_y$$

$$\boldsymbol{c}^i\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_0) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S(\boldsymbol{x}_0;\varepsilon)} \boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y})\,dS_y\ ,\quad S(\boldsymbol{x}_0;\varepsilon):\text{半径}\ \varepsilon\ \text{の球表面}$$

時空領域での積分方程式も同様にして導かれる。[3),4)] 基本解は，Fourier 変換とか Hörmander の方法により求められる。なお，基本解を陽に用いずに積分方程式の中で処理してしまうことも提案されている。[5)] また，場の微分方程式の主要部分に対する基本解を用いることも考えられている。[6),7)] この際には，領域積分も含まれることとなる。

shoichi Kobayashi

3. 積分方程式法の発展

積分方程式法は最近急速に種々の問題に適用されるようになった。(詳細は文献1),8)など参照)。また，基本的な問題に関しても考察が深められている。以下にそれらの例を述べる。

<u>a) 特異点の処理</u>：混合境界の境目の点は一般に特異点となる。特異点を含む積分方程式を精度よく解くためには，特異性を考慮することが必要である。そのためには，特異解を用いるとよい。特異点を含む要素上の積分は，補助的な積分経路を設定して評価できる[9]。

凸角での法線導関数の多価性は，角両側に独立な点(double point)を取り，これに対して，応力の不変性とひずみの第一不変量の両条件を追加して解く方法も提案されている[10]。この技法は，非均質物質間の角部分にも適用される。その他，特異要素も用いられている。

<u>b) 見かけの固有振動の問題</u>：時間調和な外部問題を積分方程式法で解く際には，内部領域に対する固有値に対応した固有振動数に関しては，解の一意性が保証されない。この問題を処理する方法は，主として音響学分野で，いくつか提案されている。(i) Greenの内部公式を制約条件として外部問題を解く方法，(ii) 2つの積分方程式を併用する方法，(iii) 修正した基本解を用いる方法，(iv) 補間法により数値的に処理する方法などである。

<u>c) 非均質領域を含む問題</u>：領域積分を含む形に定式化することも可能であるが，複雑なものに対しては，有限要素法などと積分方程式法を結合した hybrid な方法が有利である。特に，この方法は外部問題，動的波動問題に対して有効である。

<u>d) 非線形問題</u>：非線形問題は，場が非線形な場合と境界条件だけが非線形な場合とに分けられる。場が線形で境界条件のみが非線形な場合には，境界条件を満足するように逐次修正して解く。場が非線形な場合でも，増分形が線形であれば，その増分量に関して積分方程式を定式化できる。この際には，一般に領域積分を伴う。

<u>e) 数値計算上の配慮</u>：基本解は $1/r$ (3-D)，$\ln r$ (2-D) などの特異性をもっているので，解析的に評価するか $r \cong 0$ 近傍では，あるいは特別な数値積分が必要である。波動問題では，計算上の"けた落ち"を防ぐために数値計算に先立って級数展開などの配慮が必要である。また，要素分割は，一波長に少なくとも4要素程度(線形要素で)が含まれることが望ましい。Fourier 変換には FFT が，Laplace 逆変換には Durbin 法(FFTによる sine および cosine 変換)が有効である。

<u>f) その他</u>：領域積分は，特殊な場合には Gauss の発散定理を用いて境界積分に変換される。基本解の代りに Green 関数，あるいは境界条件の一部でも満足する解を用いると数値解析上有利である。

<u>文献</u>：1) 小林，材料，32，363，pp.1293～1303(昭.58)，2) S. Kobayashi, "Boundary Elements" (第5回BEM会議，広島)，pp.775～784 (昭.58)，Springer，3) Y. Niwa et al., Theoret. Appl. Mech., 28, pp.281-290, Univ. of Tokyo Press (1980)，4) Mansur et al., ibid 2)，pp.677-698，5) N. Nishimura et al., ibid 2)，pp.345-354，6) 登坂，数理科学，234，pp.10-16(昭.57)．7) Y. Niwa et al., ibid 2)，pp.751-763，8) 例えば，第1回～第5回BEM会議，P.K. Banerjee et al. (eds.)，Developments in Boundary Element Methods，1，2．Applied Science，1979，1980 etc．9) J.O. Watson，Res Mech.，4，23 (1982)，10) M. Chaudonneret，"Recent Advances in Boundary Element Methods"，(ed.) C.A. Brebbia，185 (1978)．