有限要素法による土構造物の極限解析について

京都大学工学部 正員 小林 昭一
〃 正員 田村 武
〃 学生員 ○角 哲也

1．はじめに． 土構造物の設計の最大の課題は、破壊に対する安全性である。従来の有限要素法による数値解析は、破壊に至るまでの過程を追跡するものであり、その延長として破壊荷重を求めているにすぎない。そこで、塑性論の上界定理から、土構造物の崩壊荷重とそのメカニズムを直接的に求めることを考える。本報文は、その手法としての剛塑性有限要素法の定式化を述べ、土構造物の支持力問題や斜面安定問題により、その適用性を検討したものである。

2．剛塑性有限要素法の定式化． いま、外力による仕事率が正となる運動学的に可容な速度場（体積一定の条件と速度境界条件を満足する速度場）$\dot{u}_i$ を設定する。これより、ひずみ速度 $\dot{\varepsilon}_{ij}$，及び、normality rule（$\dot{\varepsilon}_{ij}$ は降伏曲面上で法線方向を向く）を満たす応力 σ_{ij} が計算される。以上から求められるエネルギー消散率(1)は、最大塑性仕事の原理と仮想仕事の原理から導かれる上界定理によれば、真の値より小さくはならない事が証明される。そこで、(2)、(3)の制約条件を満たす $\dot{u}_i$ の中で、(1)を最小にすれば、それが破壊時における真の荷重強度となることがわかる。ここに、S_σ は応力境界であり、変位境界 S_u では $\dot{u}_i=0$、また、表面力 T_i，物体力 X_i とする。

以上の問題を、有限要素法により有限次元に下した空間で考える。そこで、外力ベクトル $\mathbb{F}$，節点変位速度 $\dot{\mathbb{u}}$、要素体積変化率への変換行列 L により、(2)、(3)は(4)、(5)となる。求める問題の解は、(7)、(8)を満たす任意の $\delta\dot{\mathbb{u}}$ に対して(6)を満足しなければならない。ここで、B は B－行列、$\mathbb{S}$ は偏差応力のベクトルである。

$$\boxed{\begin{aligned}&\int \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}\,dV=\int D(\dot{\varepsilon}_{ij})\,dV\rightarrow \min &(1)\\ &\text{sub. to}\begin{cases}\int_{S_\sigma} T_i\dot{u}_i\,dS+\int X_i\dot{u}_i\,dV=1 & (2)\\ \dot{u}_{i,i}=0 & (3)\end{cases}\end{aligned}}$$

$$\mathbb{F}^T\dot{\mathbb{u}}=1 \qquad (4)$$

$$L\,\dot{\mathbb{u}}=0 \qquad (5)$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\left(\int B^T\mathbb{S}\,dV\right)^T\delta\dot{\mathbb{u}}=0 & (6)\\ &\text{for }\forall\delta\dot{\mathbb{u}}\text{ s.t.}\begin{cases}\mathbb{F}^T\delta\dot{\mathbb{u}}=0 & (7)\\ L\,\delta\dot{\mathbb{u}}=0 & (8)\end{cases}\end{aligned}}$$

$$\boxed{\int B^T\mathbb{S}\,dV+L^T\lambda=\mu\mathbb{F}} \qquad (9)$$

$$\int D(\dot{\mathbb{u}})\,dV=\mu \qquad (10)$$

$$\boxed{\Phi=\int D(\dot{\mathbb{u}})\,dV-\lambda^T(L\dot{\mathbb{u}})+\mu(\mathbb{F}^T\dot{\mathbb{u}}-1)} \qquad (11)$$

$$S_{ij}S_{ij}=\sigma_0^{\,2} \qquad (12)$$

$$D(\dot{\varepsilon}_{ij})=\sigma_0\bar{\dot{\varepsilon}}\quad\left(\bar{\dot{\varepsilon}}=\sqrt{\dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}}\right) \qquad (13)$$

ところで、線形代数学の理論によれば、(6)～(8)は、(9)なる方程式に解 λ，μ が存在するための必要十分条件である。(9)は、λ を不定圧，μ を荷重強度とする時のつりあい条件である。すなわち、問題は、normality rule より導かれる偏差応力 $\mathbb{S}$ と不定圧 λ が外力 $\mu\mathbb{F}$ とつりあい、かつ(4)、(5)を満たすような速度場 $\dot{\mathbb{u}}$ を見つける事に帰着される。また、(9)の両辺に $\dot{\mathbb{u}}^T$ を左から乗ずれば(10)は明らかであり、従って、μ は荷重強度の上界値を与えることになる。また、以上の事は、(11)で定義される $\Phi(\dot{\mathbb{u}},\lambda,\mu)$ の $\dot{\mathbb{u}}$，λ，μ に関する停留点を求めることと等価である。

Shoichi Kobayashi , Takeshi Tamura , Tetsuya Sumi

3、数値解析例。

以下の例題では、von Misesの降伏条件(12)を想定し、これより、$D(\varepsilon_{ij})$は、(13)で計算される。 また、解くべき非線形方程式(4)、(5)、(9)の解は、Newton法により、逐次近似して求めた。

例1、半無限地盤への剛体ポンチの押込み問題

これは、浅い基礎の支持力問題であり、すべり線理論による極限支持力は、$q_u=(2+\pi)c_0$である。 本法による計算結果は、$q_u=5.36$（ただし$c_0=1$とする）と、誤差5(%)程度であった。また、崩壊時における速度場は、Fig.1の矢印で示される通りである。

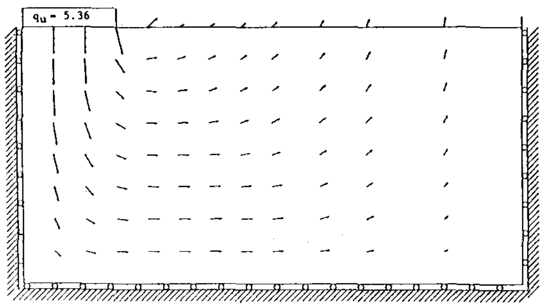

Fig. 1

例2、斜面の安定問題

Taylorによれば、斜面傾斜角と深さ係数に関係する斜面の安定係数が、円弧すべり面法を用いて、Fig.2の様に与えられている。 そこで、本法では、斜面の高さ一定のもとで、重力加速度を未知変量とし、崩壊時の重力加速度から安定係数を計算した。 種々の斜面形状に対する結果は、Fig.2においてΔ印で示す。また、Fig.3～4は、そのうちの2例で、破線は、従来からの円弧すべり面を示している。Fig.5は、Fig.4に対応する主応力図である。

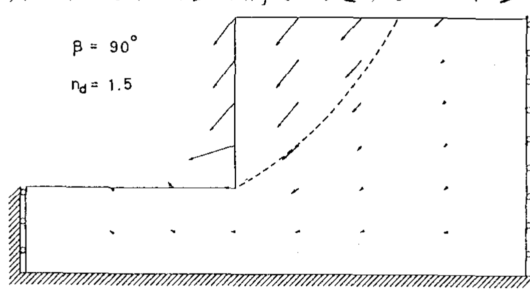

Fig. 3

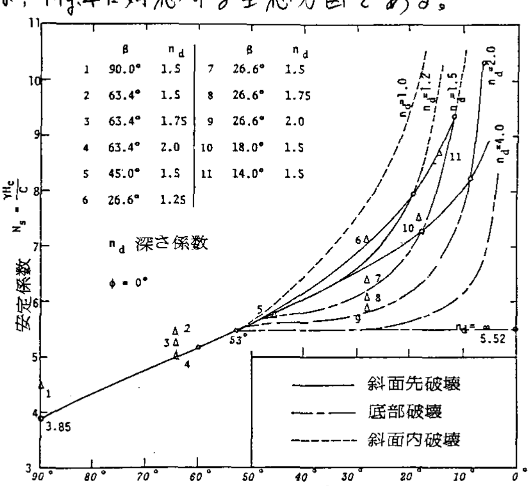

Fig. 2

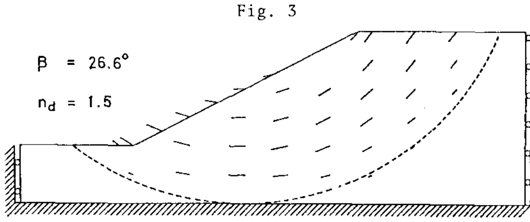

Fig. 4

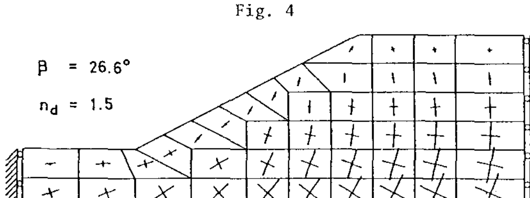

Fig. 5

以上の結果から、本法による土構造物の極限解析の十分なる適用性が確かめられた。

4、参考文献

1）島　進　分担著、「続・初心者のための有限要素法、第4章」、日本材料学会　（1982）

2）小林　昭一、田村　武、角　哲也、「剛塑性有限要素法による土構造物の極限解析について」、土質工学研究会講演集（1983）