

有限要素法による波動境界層内の運動特性の計算

京都大学工学部 正員 岩垣雄一
 熊本大学工学部 正員 滝川 清
 京都大学工学部 学生員 〇澤路陽一
 久保田鉄工 西村真二

1. はじめに 波動場における境界層内の流れの挙動を知ることは、波高減衰や漂砂の問題と関係して非常に重要である。本研究は波動場における底面境界層に対する線形および非線形の支配方程式を有限要素法によって解析したものであり、流速分布について2, 3の計算例を示す。この方法をさらに斜面や任意形状の底面上の境界層に拡張すれば、現実の海底面上の境界層内の流れの挙動を知る上で非常に有用であると思われる。

2. 有限要素法による定式化

(1) 線形方程式の場合 この場合の境界層内の運動方程式は、

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u_b}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (N_z \cdot \frac{\partial u}{\partial z}) \quad (1)$$

(N_z : 渦動粘性係数、 $u(z, t)$: 境界層内の水平流速、 $u_b(z, t)$: 境界層外縁の水平流速)

境界条件は、境界層厚をとって $z = \delta$ で $u = u_b$, $z = 0$ (底面) で $u = 0$ (2)

式(1)に対して重み関数を W^* としてガラーキン法の定式化を行なうと、

$$\int (\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u_b}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} (N_z \cdot \frac{\partial u}{\partial z})) \cdot \delta W^* dz = 0 \quad (3)$$

各要素での形状関数を ϕ として表現すると、各要素の u および W^* は、節点値 $\{u\}$, $\{W^*\}$ を用いて $u = \phi^T \{u\}$, $W^* = \phi^T \{W^*\}$ となり、式(3)は最終的に

$$M \{\dot{u}\} + K \{u\} - M \{u_b\} = 0 \quad (4)$$

M , K は係数マトリクスで式(5)のようになり、時間微分項に対しては式(6)のようにして時間差分を行なった。

$$M = \sum \int \phi \phi^T dz, \quad K = \sum N_z \left\{ \int \phi \frac{\partial \phi^T}{\partial z} - \left[\phi \frac{\partial \phi^T}{\partial z} \right]_0^\delta \right\} \quad (5)$$

$$\dot{u}_t = \frac{2}{\Delta t} (u_t - u_0) - \dot{u}_0 \quad (u_0 \text{ は } t - \Delta t \text{ 時刻の値}) \quad (6)$$

(2) 非線形方程式の場合 この場合の境界層内の運動方程式および連続式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} (N_z \frac{\partial u}{\partial z}) \quad (7) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (8)$$

ここで境界層内の圧力は境界層外の圧力に等しいと仮定して次式で与えられる。

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial u_b}{\partial t} + u_b \frac{\partial u_b}{\partial x} \quad (9)$$

式(7), 式(8)はガラーキン法によって定式化を行なうと

$$\int_V \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial z} (N_z \frac{\partial u}{\partial z}) \right) \delta W^* dV = 0 \quad (10) \quad \int_V \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \delta W^* dV = 0 \quad (11)$$

各要素での形状関数を ϕ とすると、各要素の u , w , $\partial p / \partial x$, W^* はそれぞれの節点値を用い

Yūichi Iwagaki, Kiyoshi Takigawa, Youichi Sawaji, Shinji Nishimura

て $u = \Phi^T \{u\}$, $w = \Phi^T \{w\}$, $\partial u / \partial x = \Phi^T \{\partial u / \partial x\}$, $w = \Phi^T \{w\}$ となり、式 (10), (11) は離散化されて最終的に式 (12) となる。

$$M \{\ddot{u}\} + A \{\dot{u}\} + B \{u\} + \frac{1}{2} M \{\partial u / \partial x\} + K \{u\} = 0 \quad (12) \quad C \{\dot{u}\} + D \{w\} = 0 \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} M &= \sum \int_e \Phi \Phi^T dV, \quad A = \sum \int_e \Phi \Phi^T \{u\} \cdot \frac{\partial \Phi^T}{\partial x} \{u\} dV, \quad B = \sum \int_e \Phi \Phi^T \{w\} \cdot \frac{\partial \Phi^T}{\partial z} \{u\} dV \\ K &= \sum N_b \left\{ \int_e \frac{\partial \Phi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \Phi^T}{\partial z} dV - \int \left[\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right]_0^{\delta} dx \right\}, \quad C = \sum \int_e \Phi \frac{\partial \Phi^T}{\partial x} dV, \quad D = \sum \int_e \Phi \frac{\partial \Phi^T}{\partial z} \{u\} dV \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

式 (12) は非線形となっているので増分法による線形化を行なった。すなわち

$$u^{n+1} = u^n + \Delta u, \quad w^{n+1} = w^n + \Delta w \quad (\Delta \text{字りは第 } n \text{ 近似解})$$

3. 数値計算例と考察 渦動粘性係数を一定値として層流理論解との比較を行なった。線形の式の場合には、計算の初期条件として解析領域内の各点での流速を 0 とし、また外縁の流速は微小振幅波による値を用いている。時間きざみは $\Delta t / T = 0.0318$ 空間のきざみは $\Delta z / \delta = 0.1$ としている。図 1 は 1 周期目の結果 (実線) を示す。この場合には 4 周期計算

すると理論解 (点線) と一致することがわかり、本計算法の適用性が検証できた。図 2 は非線形の解析法を用いて計算した例であり、線形の理論解との比較を行なった。(図中に示すのは 1 次元の層流線形理論解である。) 入射波の条件は $H/L = 0.02$, $h/L = 0.25$, $T = \pi \text{ sec}$ の場合である。境界層外縁の条件は微小振幅波理論により、また水深は一定とした。時間きざみは $\Delta t / T = 0.1$, 空間のきざみは鉛直方向が $\Delta z / \delta = 0.1$, 水平方向が $\Delta x / L = 0.05$ とした。この場合波面が静水面と交差する近傍であり、 $\partial u / \partial t$ および $u \cdot \partial u / \partial t$ が大である位相であるが、理論解との相違は底面近くであわすか、全体的には余り見受けられない。よって波が微小振幅波で水平床の場合には、非線形項の影響は小さいと考えられる。また、初期条件として水平方向の流速には層流境界層の理論解を与え、鉛直方向の流速を 0 としているが、4~5 周期で定常になる。

4. おわりに

有限要素法の利点から、入力条件、底面形状が任意に与えられるので現実の一般的な場合にも適用できる。現在碎波点近傍や斜面上などの非線形性の強い場合について解析を進めている。

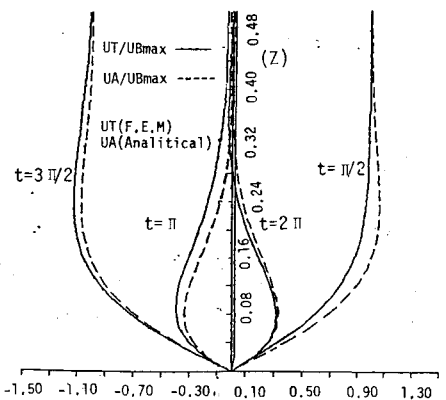


図-1 水平水粒子速度の位相変化 (線形解析)

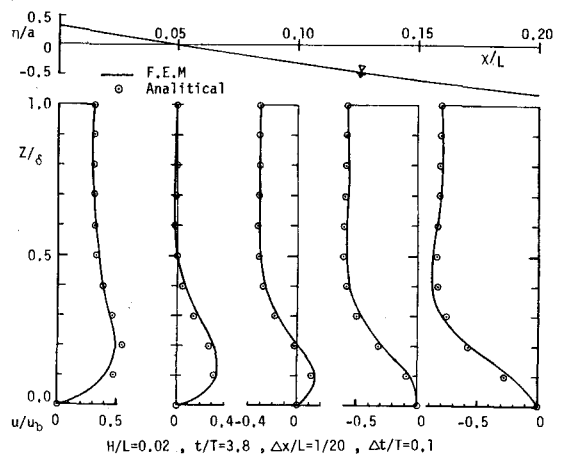


図-2 水平水粒子速度の空間分布 (非線形解析)